



Ciencias Puras

Revista Científica

Ph. D. Ing. Pedro Guido López Cortez
RECTOR

M. Sc. Ing. David Soraide Lozano
VICERRECTOR

Ph. D. Ing. Oscar Percy Gutiérrez Gómez
DIRECTOR DE LA DIRECCIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

M. Sc. Lic. Gonzalo Miguel Pool García
DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PURAS

M. Sc. Lic. Simón Huaquipa Callamuyo
DIRECTOR DE LA CARRERA DE FÍSICA

M. Sc. Lic. Sabino Colque Caballero
DIRECTOR DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA

M. Sc. Lic. Elena Ayala García
DIRECTORA DE LA CARRERA DE QUÍMICA

M. Sc. Lic. Nelly Camacho Ocsachoque
DIRECTORA DE LA CARRERA DE ESTADÍSTICA

M. Sc. Lic. Aleida Mirian Barrientos Enríquez
DIRECTORA DE LA CARRERA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

M. Sc. Lic. Huáscar Fedor Gonzales Guzmán
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PURAS

CIENCIAS PURAS - REVISTA CIENTÍFICA

Volumen II - Número I, Julio 2025

Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Puras

Universidad Autónoma Tomás Frías

Diseño Gráfico y Diagramación: M. Sc. Lic. Huáscar Fedor Gonzales Guzmán

Todos los derechos reservados, el presente documento es propiedad intelectual

de la UATF © INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FF. CC. PP. - U.A.T.F.

POTOSÍ - BOLIVIA, JULIO DE 2025

<https://revista-i2cp.uatf.edu.bo> 

i2cp@uatf.edu.bo 

Av. del Maestro, Edificio Central de la UATF 



Índice de **CONTENIDOS**

- | | | |
|------------|---|---------|
| 01. | Caracterización de irradiación solar con datos terrestres y satelitales para Potosí, Bolivia | 1 - 11 |
| 02. | Características del viento y potencia eólica disponible en la región de la ciudad de Potosí | 12 - 21 |
| 03. | Coeficientes de emisión en la ley de Stefan-Boltzmann para predecir estructuras sedimentarias de la localidad de San Antonio del departamento de Potosí | 22 - 31 |
| 04. | Implementación de planta estacionaria escala laboratorio para la producción de Li_2CO_3 | 32 - 46 |
| 05. | Relación teórica entre matrices estocásticas regulares y vectores de probabilidad fijos en cadenas de Markov discretas | 47 - 61 |
| 06. | La taxonomía de Bloom en la programación computacional | 62 - 72 |
| 07. | Aplicación de redes neuronales convolucionales para el reconocimiento de imágenes: comparación de modelos de Deep Learning | 73 - 80 |



CIENCIAS PURAS REVISTA CIENTÍFICA

PUBLICACIÓN DE

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE
CIENCIAS PURAS (I2CP)
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA TOMÁS FRÍAS**

Volumen II - Número I
JULIO DE 2025

<https://revista-i2cp.uatf.edu.bo>
i2cp@uatf.edu.bo

Declaración de Derechos de Autor

Todos los contenidos de esta publicación están protegidos por la Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0. Esto significa que el material puede ser compartido, copiado y redistribuido en cualquier formato o medio, bajo las siguientes condiciones:

- **Atribución:** Debe otorgarse el crédito correspondiente, incluir un enlace a la licencia e indicar si se realizaron modificaciones.
- **No comercial:** No se permite el uso del contenido con fines comerciales.
- **Sin obras derivadas:** No se autoriza la distribución de versiones modificadas, transformadas o adaptadas del material.

Para obtener más información sobre esta licencia, visite:  [https://creativecommons.org/licenses/by-](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

[nc-nd/4.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Para consultas o solicitudes de permiso, comuníquese con:



 i2cp@uatf.edu.bo

 revista-i2cp.uatf.edu.bo

 i2cp.uatf.edu.bo



Caracterización de irradiación solar con datos terrestres y satelitales para Potosí, Bolivia

Solar irradiation characterization with ground and satellite data for Potosí, Bolivia

Abad Santos Ckacka Condori
abadfis7@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-9169-4736>
Universidad Autónoma Tomás Frías
Potosí - Bolivia

RESUMEN

La comprensión del movimiento aparente del Sol es fundamental para diversas aplicaciones, como sistemas fotovoltaicos, térmicos y el aprovechamiento pasivo de la radiación solar en la arquitectura bioclimática. Este estudio tiene como objetivo analizar y caracterizar la irradiación solar en la ciudad de Potosí, Bolivia utilizando herramientas como la estación meteorológica Profel Clima, el sistema satelital PVGIS-ERA5 y modelos matemáticos para obtener datos sobre la trayectoria y el potencial solar de la región.

Los resultados permitirán planificar proyectos que contribuirá a promover el uso de energías renovables y optimizar el aprovechamiento de la energía solar en Potosí que cuenta con un alto potencial energético que oscila entre 137 y 260 W/m²/mes, además 13 horas con 18 minutos de luz en verano y 10 horas con 57 minutos en invierno.

Los datos fueron interpretados considerando como referencia la ciudadela universitaria, ubicada a una longitud -19.55537030 y latitud -65.76340450 a una altura de 3767 msnm.

Palabras clave: Energía solar; Geometría solar; Irradiación solar; Trayectoria solar.

ABSTRACT

Understanding the apparent motion of the Sun is essential for various applications, such as photovoltaic and thermal systems, and the passive use of solar radiation in bioclimatic architecture. This study aims to analyze and characterize solar irradiation in the city of Potosí, Bolivia, using tools such as the Profel Clima weather station, the PVGIS-ERA5 satellite system, and mathematical models to obtain data on the trajectory and solar potential of the region.

The results will allow for planning projects that will contribute to promoting the use of renewable energy and optimizing the use of solar energy in Potosí, which has a high energy potential ranging from 137 to 260 W/m²/month, with 13 hours and 18 minutes of daylight in the summer and 10 hours and 57 minutes in the winter.

The data were interpreted considering the university citadel as a reference, located at a longitude of -19.55537030 and latitude of -65.76340450 at an altitude of 3767 meters above sea level.

Key words: Solar energy; Solar geometry; Solar irradiation; Solar path.

INTRODUCCIÓN

La ciudad de Potosí está ubicado al suroeste del País, limitando al norte con los departamentos de Oruro y Cochabamba, al este con los departamentos de Chuquisaca y Tarija, y al sur con la República Argentina, al oeste con la Republica de Chile.

Para aprovechar al máximo la energía solar en una instalación solar ubicada en un punto fijo de la Tierra, es fundamental orientar correctamente el sistema de captación, esto requiere conocer el movimiento del sol desde ese punto específico, según las estaciones del año.

En Bolivia el sol llega con un promedio de 12 horas al día, a razón de 5 kWh/m²/día en promedio y de 1400 – 1800 kWh/m²/año de irradiación solar que se puede aprovechar la energía solar prácticamente en cualquier parte del territorio nacional y en cualquier época del año. La radiación solar global se tiene en mayor porcentaje en el occidente boliviano cómo ser en los departamentos de La Paz, Oruro, Cochabamba, Potosí y parte de Tarija [8].

En la ciudad de Cochabamba- Bolivia se obtuvo los datos experimentales de la irradiación solar de la estación meteorológica de la universidad de Mayor de San Simón registrándose un valor mínimo en el mes julio 4759 Wh/m²/día y el máximo registrado en el mes de noviembre siendo 7040 Wh/m²/día [8].

En el contexto de la ciudad de Potosí - Bolivia, que se encuentra a una altitud de 4019 msnm (plaza principal 10 de noviembre), las condiciones climáticas son particulares, lo que puede impactar significativamente en la cantidad de radiación solar que recibe la región.

El trabajo de investigación se centra en la comparación de diferentes fuentes de datos para la cuantificación y caracterización de la radiación solar en la ciudad de Potosí, utilizando tres fuentes como ser: la estación meteorológica Profel Clima Carrera de Física de la Universidad Autónoma Tomás Frías

(UATF), PVGIS-ERA5 y modelos matemáticos, con los cuales se contrastará los datos de la trayectoria solar, temperatura e irradiación solar. Esta comparación permitirá determinar qué método proporciona la estimación más confiable de la irradiación solar para la región y facilitará una mejor planificación para el aprovechamiento de la energía solar.

MATERIALES Y MÉTODOS

Herramientas de obtención de datos.

La estación meteorológica Profel Clima de la carrera de Física de la UATF, registra las variables atmosféricas día y noche, como ser: La dirección y velocidad del viento, radiación solar, humedad relativa ambiente, temperatura y presión barométrica en periodos estacionales, mensuales y diarios a intervalo de diez minutos.

El PVGIS (Photovoltaic Geographical Information System) es un sistema web que permite obtener datos de radiación solar que dispone de cinco bases de datos diferentes. Para la región de estudio está habilitado PVGIS-ERA5, siendo un modelo que tiene una resolución espacial de $(0,25^\circ \times 0,25^\circ)$ a 25 km aproximadamente. Es un producto global de análisis generado por el centro europeo de previsiones meteorológicas a medio plazo (ECMWF) de intervalo temporal: 2005-2023, lo que permite un análisis detallado de la irradiación solar a nivel regional.

La Sun Earth Tools es una herramienta interactiva diseñada para estudiar y analizar la trayectoria solar en diferentes ubicaciones geográficas y momentos del año. Permite modelar la posición del sol a lo largo del día y durante todo el año, proporcionando información crucial para diversas aplicaciones referente a la energía solar.

Geometría solar

Para disponer la máxima cantidad de energía solar incidente sobre la superficie de captación de una instalación solar en un punto fijo de la tierra, es necesario orientar correctamente, para el cual, se necesita conocer el movimiento aparente del Sol en un referencial que se encuentra en dicho punto fijo.

Para captar mayor cantidad de energía solar, se debe tomar en cuenta la trayectoria del Sol, que ocurre por el lado Sur en los países del hemisferio norte, mientras que en el hemisferio Sur es por el lado Norte, por lo cual, Bolivia debe tomar en cuenta la trayectoria del sol en el hemisferio sur, siendo el equinoccio de primavera el 21 de septiembre, equinoccio de otoño el 21 de marzo, solsticio de verano el 21 de diciembre y solsticio de invierno el 21 de junio.

La declinación solar δ está definida como el ángulo formado por el eje Tierra- Sol con el plano ecuatorial terrestre. La declinación anual varía entre $23^\circ 27'$ (aproximadamente el 21 de junio) y $-23^\circ 27'$ (aproximadamente el 21 de diciembre). Los equinoccios están definidos, como el momento del año en el cual la duración del día es igual al de la noche, que ocurre cuando la declinación es nula [3]. Las variaciones de la declinación solar para un día específico del año, de acuerdo con la ley de Kepler, se expresan mediante la ecuación (1).

$$\delta = 23,5 \operatorname{sen} \left(\frac{360}{365} (d_n + 284) \right) \quad (1)$$

Para localizar la posición del sol en cualquier hora del día para cualquier día del año a partir de una posición fija de la tierra, se termina la altura solar β y el acimut solar ϕ , que son las coordenadas que definen la posición del Sol. La altura solar β se mide a partir del horizonte, es decir valdrá 0° cuando el sol se encuentre en el horizonte y 90° como máximo si el sol se encuentra en el cenit [3]. Para el cálculo de la altura solar β se determina a partir de declinación solar δ , la latitud L y el ángulo horario AH , mediante la relación (2).

$$\operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}(L)\operatorname{sen}(\delta) + \cos(L)\cos(\delta)\cos(AH) \quad (2)$$

En cuanto al azimut solar ϕ se encuentra a partir del Norte con relación al hemisferio sur. Es decir que el acimut solar valdrá 0° cuando la posición del Sol se encuentre dentro del plano meridiano lo que ocurre al medio día solar [3]. Para el cálculo del azimut solar ϕ se determina a partir de la declinación δ , altura solar β y la latitud, con la relación (3).

$$\cos\phi = \frac{\operatorname{sen}(\delta) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(L)}{\cos(\beta)\cos(L)} \quad (3)$$

Radiación solar

La radiación solar es la energía emitida por el Sol en forma de radiación electromagnética. Esta energía se propaga a través del espacio y llega a la Tierra, donde es fundamental para mantener la vida y generar diversas formas de energía. La radiación solar está compuesta por diferentes tipos de radiación electromagnética, que se clasifican principalmente en tres categorías como: Radiación infrarroja, Radiación visible y Radiación ultravioleta [6].

La cantidad de radiación solar global horizontal que alcanza la superficie terrestre depende de diversos factores, como la hora del día, la estación del año, declinación solar δ y el ángulo horario ω_s en radianes, los cuales pueden predecirse mediante la relación (4).

$$H_{OH} = \frac{24 * 60}{\pi} I_o * d_r [\omega_s * \operatorname{sen}(L) * \operatorname{sen}(\delta) + \cos(L)\cos(\delta)\operatorname{sen}(\omega_s)] \quad (4)$$

Siendo $I_o = 1370 \text{ W/m}^2$ la constante solar proveniente del sol.

RESULTADOS

Realizando los cálculos para predecir la posición del sol como error entre los datos obtenidos por Sun Earth Tools de la altura solar β y el azimut ϕ para el solsticio de verano (21 de diciembre) de la gestión el lugar de la Ciudadela Universitaria de la UATF con latitud $-19,55537$ y longitud $-65,763404$ que se tiene en la tabla 1.

Tabla 1

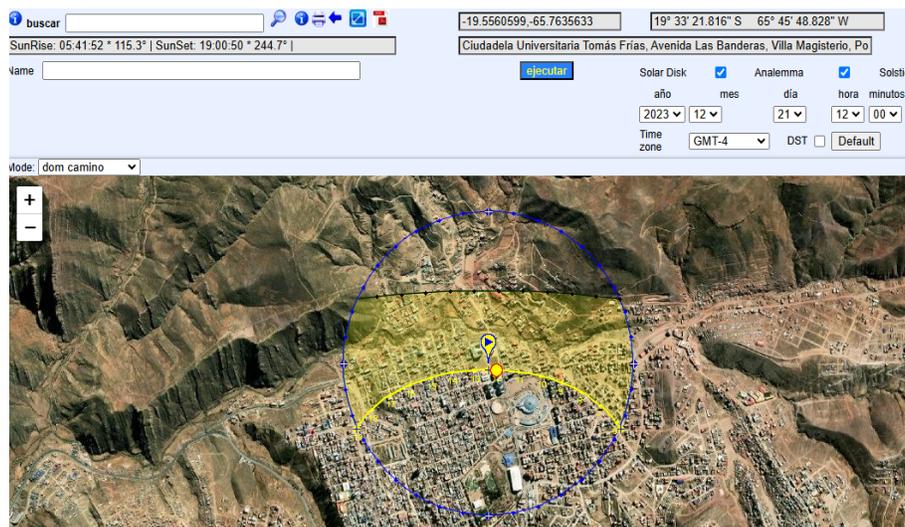
Datos calculados y descargados de la altura solar y azimut para el 21 de diciembre, 2023

T local	Altura solar [°] calculado	Azimut solar [°] calculado	Altura solar [°] Sun Earth Tools	Azimut solar [°] Sun Earth Tools	Error % De altura solar	Error % de azimut solar
06:00	2,38	114,13	3,05	113,81	28,23	0,28
07:00	15,49	109,92	16,18	109,66	4,47	0,23
08:00	28,91	106,69	29,62	106,47	2,45	0,21
09:00	42,53	104,38	43,25	104,20	1,68	0,17
10:00	56,27	103,30	56,98	103,18	1,27	0,12
11:00	69,99	105,14	70,71	105,23	1,03	0,08
12:00	83,08	125,86	83,70	128,96	0,74	2,47
13:00	80,84	242,92	80,22	244,92	0,77	0,82
14:00	67,46	255,64	66,77	255,96	1,02	0,13
15:00	53,71	256,63	53,02	256,71	1,29	0,03
16:00	40,00	255,27	39,30	255,25	1,74	0,01
17:00	26,40	252,78	25,72	252,70	2,59	0,03
18:00	13,03	249,38	12,36	249,25	5,13	0,05

Nota. La trayectoria solar mediante Sun Earth Tools para el 21 de diciembre de la gestión 2023 para la Ciudadela Universitaria de la UATF, se puede ver cómo se indica en la figura 1.

Figura 1

Imagen satelital y trayectoria solar de la Ciudadela Universitaria de la UATF (Sun Earth Tools)

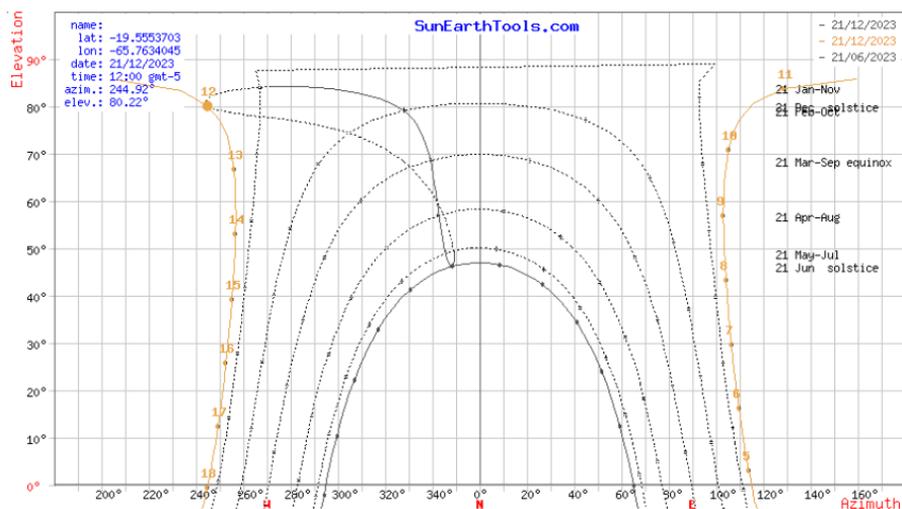


Nota: El 21 de diciembre, en la ciudad de Potosí, se marca el solsticio de verano en el hemisferio sur, y el sol salió por el Sureste a horas 05:41 con un azimut 115,3° y la puesta del sol fue a las 19:00 al Suroeste con un azimut 244,7°. Las horas de luz para el día 21 de diciembre fueron de 13 horas con 18 minutos, con el medio día solar ocurrido a las

12:21. Durante ese momento, la altura solar alcanzó aproximadamente 80° de elevación, con un azimut de 245° , como se representa en la figura 2.

Figura 2

Trayectoria solar 21/12/2023 por Sun Earth Tools.



Nota. Para el solsticio de invierno (21 de junio), los valores calculados del ángulo horario (AH), la altura solar (β) y el azimut (ϕ) se representan en la tabla 2.

Tabla 2

Datos calculados para el solsticio de invierno 21 de junio, 2023

T local	Ángulo horario solar (AH)	Altura solar (β)	Azimut solar (ϕ)
7:00	-80,402	0,609	64,726
8:00	-65,402	13,076	58,874
9:00	-50,402	24,668	51,040
10:00	-35,402	34,815	40,322
11:00	-20,402	42,570	25,727
12:00	-5,402	46,624	7,221
13:00	9,598	45,939	347,298
14:00	24,598	40,713	329,761
15:00	39,598	32,168	316,327
16:00	54,598	21,540	306,522
17:00	69,598	9,659	299,320
18:00	84,598	-2,988	293,903

Nota. Para el 21 de junio, en la ciudad de Potosí, marca el solsticio de invierno en el hemisferio sur. En esta fecha, el sol alcanza su posición más baja en el cielo durante el año, y la duración del día es la más corta. El Sol salió por el noreste a horas 06:56 aproximadamente, con un azimut 65,36° y la puesta del sol fue por el suroeste a las 17:53, con un azimut 294,64°. Las horas de luz es de 10 horas con 57 minutos y la altura solar a medio día (12:24) esta aproximadamente 47° de elevación, y con azimut de 65° representando en la figura 3 y se detalla en la tabla 3 los datos obtenidos por la herramienta Sun Earth Tools.

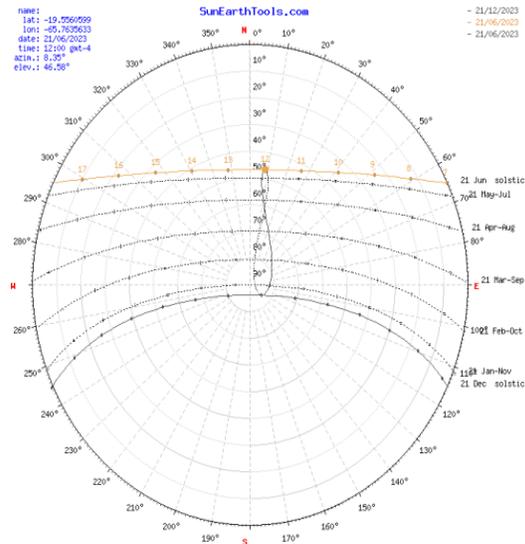
Tabla 3

Datos obtenidos, 21/06/2023 (Sun Earth Tools)

Fecha:	21/06/2023 GMT-4	
coordinar:	-19.5560599, -65.7635633	
ubicación:	-19.55605990, -65.76356330	
hora	Elevación	Azímüt
06:56:28	-0.833°	65.36°
7:00:00	-0.08°	65.07°
8:00:00	12.43°	59.3°
9:00:00	24.09°	51.6°
10:00:00	34.34°	41.07°
11:00:00	42.27°	26.7°
12:00:00	46.58°	8.35°
13:00:00	46.17°	348.37°
14:00:00	41.17°	330.61°
15:00:00	32.77°	316.93°
16:00:00	22.22°	306.94°
17:00:00	10.39°	299.62°
17:53:31	-0.833°	294.64°

Figura 3

Trayectoria solar 21/06/2023 (Sun Earth Tools)

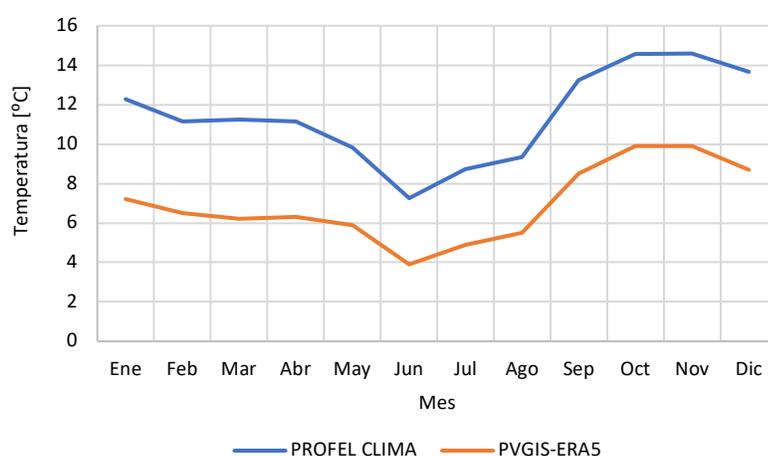


Caracterización de la temperatura e irradiación solar para la ciudad de potosí.

La ciudad de Potosí se caracteriza por un clima frío, debido a su ubicación geográfica y su elevada altitud. La figura 5 muestra la comparación de las temperaturas promedio mensuales obtenidas de las fuentes: Profel clima y PVGIS-ERA5. Ambas series reflejan una clara variación estacional, con temperaturas más bajas durante el invierno (junio y julio) y más altas en primavera y verano (entre octubre y enero). Se observa que los datos de Profel clima presentan temperaturas consistentemente mayores que los de PVGIS-ERA5 en todos los meses del año, con diferencias más marcadas entre agosto y diciembre, alcanzando hasta 5 °C. Esta discrepancia puede atribuirse a factores como la resolución espacial del modelo ERA5, las condiciones locales específicas (como altitud o microclima).

Figura 4

Temperaturas promedio mensuales de la gestión 2023 (Profel clima- PVGIS-ERA5)



Nota. La irradiación solar global horizontal, obtenida a partir de los datos calculados y descargados de la estación meteorológica Profel clima y PVGIS-ERA5, corresponde a la gestión 2023, tomando como referencia la ciudadela universitaria de la UATF, como se indica la tabla 4.

Tabla 4

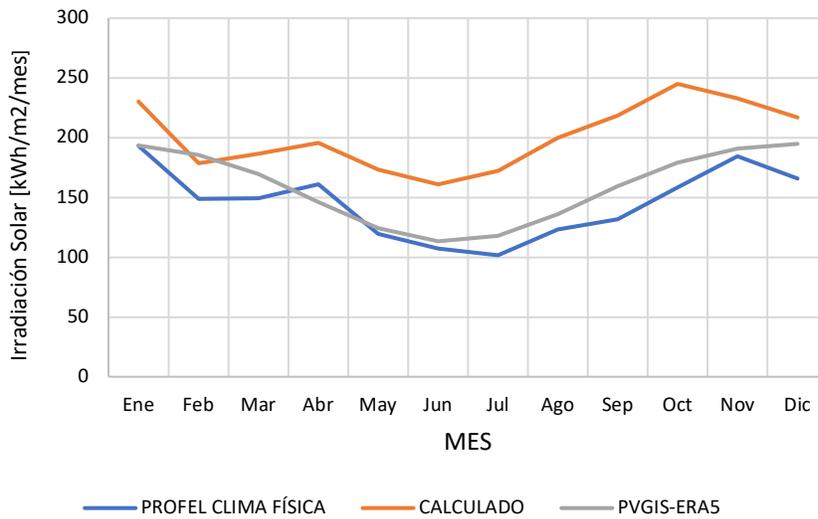
Irradiación Solar Global Horizontal Mensual (Gestión 2023) Obtenida por Modelos Matemáticos, PVGIS-ERA5 y Estación Meteorológica, con Cálculo del Error entre Métodos

Mes	Irradiación extraterrestre calculado [kWh/m ² /mes]	Irradiación PVGIS-ERA5 [kWh/m ² /mes]	Irradiación Profel clima Física [kWh/m ² /mes]	Error entre calculado PVGIS-ERA5	Error entre calculado Profel clima	Error entre PVGIS-ERA5 Profel clima
Ene	193,50	230,00	193,20	0,19	0,00	0,16
Feb	185,71	178,50	148,90	0,04	0,20	0,17
Mar	169,34	186,90	149,20	0,10	0,12	0,20
Abr	145,97	195,40	161,30	0,34	0,11	0,17
May	124,24	173,20	119,60	0,39	0,04	0,31
Jun	113,34	161,00	107,30	0,42	0,05	0,33
Jul	117,91	172,30	101,70	0,46	0,14	0,41
Ago	136,10	200,10	123,50	0,47	0,09	0,38
Sep	159,52	218,80	131,90	0,37	0,17	0,40
Oct	179,23	245,00	158,30	0,37	0,12	0,35
Nov	190,71	232,90	184,30	0,22	0,03	0,21
Dic	194,88	216,80	165,90	0,11	0,15	0,23

Nota. Al graficar la irradiación solar promedio mensual en función a los meses, se observa un comportamiento similar entre ambas fuentes, sin embargo, los valores calculados resultan superiores a los datos descargados, como se indica en la figura 5.

Figura 5

Comparación de la irradiación solar global horizontal mensual de la gestión 2023



DISCUSIÓN

La trayectoria solar indica que, durante el solsticio de verano 21 de diciembre e invierno 21 de junio corresponden respectivamente, al día más largo y al día más corto del año para Potosí. Por otro lado, los valores negativos de la altura solar que se determinaron a partir de las ecuaciones para un tiempo en que todavía no amaneció o ya anocheció y al comparar la trayectoria solar calculada con los datos de Sun Earth Tools para el 21 de diciembre, se observa una diferencia promedio de altura solar de $0,68^\circ$ y una diferencia promedio en el azimut de $0,53^\circ$.

Las temperaturas promedio mensuales registradas por la estación meteorológica y por PVGIS-ERA5 para gestión 2023 muestran una diferencia de temperatura media de 4°C con un margen error de $0,40^\circ\text{C}$.

De acuerdo con el trabajo de investigación de la Organización Latinoamericana de Energía (OLADE) la energía proveniente de la irradiación solar mensual para Bolivia alcanza aproximadamente de $155 \text{ kWh}/\text{m}^2$. Y según el estudio sobre la estimación de los valores de la radiación solar global en la ciudad de Cochabamba, que obtuvieron los datos experimentales de la estación meteorológica de la Universidad de Mayor de San Simón. Se registró un valor mínimo de $4759 \text{ W}/\text{m}^2/\text{día}$ ($142,77 \text{ kWh}/\text{m}^2/\text{mes}$) en el mes de junio y un valor máximo de $7040 \text{ Wh}/\text{m}^2/\text{día}$ ($211,2 \text{ kWh}/\text{m}^2/\text{mes}$) registrado en el mes de noviembre.

Los datos de la irradiación solar global obtenidos de la estación meteorológica Profel Clima para la ciudad de Potosí indican que en el mes de junio es $107,30 \text{ kWh}/\text{m}^2/\text{mes}$ y en noviembre la irradiación es $184,30 \text{ kWh}/\text{m}^2/\text{mes}$. Al comparar los datos calculados y obtenidos por la estación meteorológica Profel Clima para junio y noviembre, el error es de 0,05 y 0,03 respectivamente. En comparación con los

datos de la estación meteorológica Profel Clima y PVGIS-ERA5, el error es de 0,33 para junio y 0,21 para noviembre.

CONCLUSIONES

La estación meteorológica de la carrera de Física de la UATF proporciona mediciones directas y en tiempo real, lo que permite obtener una imagen precisa de la radiación solar a nivel local. Sin embargo, los datos pueden estar limitados en términos de cobertura espacial. Por otro lado, los datos satelitales como los datos calculados mediante modelos matemáticos ofrecen una visión más amplia y global de la radiación solar, cubriendo áreas extensas y proporcionando una resolución espacial y temporal considerable, aunque los datos son extraterrestres que varían con respecto a los datos terrestres.

Con respecto a los valores de la irradiación solar promedio en Bolivia y en la ciudad de Cochabamba, la radiación solar en la ciudad de Potosí se encuentra en un margen aceptable con un promedio mensual de $145,4 \text{ kWh/m}^2/\text{mes}$ y $1744,8 \text{ kWh/m}^2/\text{año}$. Por el cual, la ciudad de Potosí cuenta con un alto potencial energético que se puede aprovechar en diversos proyectos con referente a sistemas solares o en la arquitectura bioclimática para nuestra región.

REFERENCIAS

- [1] Abella, M. A., & Romero, F. C. (2009). Sistemas de bombeo fotovoltaico. Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas–CIEMAT. Madrid, España.
- [2] Amaia Goñi Fernández. (2022). Comparación y validación de la radiación en bases de datos en línea. Universidad de Jaén UJA, España.
- [3] Daniel Cabrera, Javier Gil. (1996). Sistemas solares para el calentamiento de agua, Proper- Bolivia y Energética. Cochabamba, Bolivia.
- [4] García Villar, A. R. A. N. C. H. A. (2021). Revisión de herramientas de ayuda al cálculo de viabilidad, diseño y simulación de sistemas fotovoltaicos. Universidad de Jaén. España.
- [5] Gómez-Azpeitia, G., Moncayo, C. C., Del Pozo, C. E., & Fernández, E. E. V. Geometría solar y sus aplicaciones. Prontuario solar, 69.
- [6] Mauricio García Castañeda, Jeannine Ewert De-Geus. (2003) Introducción a la física Moderna, tercera edición ISBN 958-701-266-6, Colombia.
- [7] Marcelo J. Lucano, I van E. Fuentes. (2010). Evaluación del potencial de radiación solar global en el departamento de Cochabamba utilizando modelos de sistemas de información geográfica e imágenes satelitales. Revista Boliviana de Física v.17 n.17 La Paz, Bolivia.

- [8] Organización Latinoamericana de Energía (OLADE), (2023) Panorama energético de América Latina y el Caribe, Primera Edición ISBN: 978-9978-70-152-2, Copyright © OLADE.
- [9] Paguay-Llamuca, A. I., Quinatoa-Caiza, C. I., Masaquiza-Vera, C. L., & Paguay-Llamuca, N. J. (2024). Evaluación de Modelos de Aprendizaje Automático en la Predicción de la Radiación Solar para el diseño de un Sistema Fotovoltaico. *Revista Científica INGENIAR: Ingeniería, Tecnología e Investigación*. ISSN: 2737-6249., 7(14 Ed. esp.), 54-74.
- [10] Pons, X. (1996). Estimación de la radiación solar a partir de modelos digitales de elevaciones: Propuesta metodológica. VII Coloquio de Geografía Cuantitativa, Sistemas de Información Geográfica y Teledetección, (7è).
- [11] Quispe Huamán, L., & Sotomayor Alzamora, G. (2022). Determinación y análisis temporal de la radiación solar global en el Altiplano de Puno. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 30(1), 69-81.
- [12] Saldaña Milla, F. A. (2024). Implementación de algoritmo de visión por computadora en la detección del punto de máxima potencia infrarroja solar-Trujillo, Perú.



Características del viento y potencia eólica disponible en la región de la ciudad de Potosí

Wind characteristics and available wind power in the Potosí city region

Roberto Ramos Castro
robertfisica@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0007-9538-4877>
Universidad Autónoma Tomás Frías
Potosí - Bolivia

RESUMEN

La estación meteorológica Profel Clima de la carrera de Física de la Universidad Autónoma Tomás Frías instalada en la ciudadela Universitaria que se encuentra ubicada a una longitud -19.55537030 y latitud -65.76340450 a una altura de 3767 msnm. Donde se registran las variables atmosféricas, que son: la dirección y velocidad del viento, radiación solar, humedad relativa, temperatura y presión barométrica en periodos estacionales, mensuales y diarios con intervalo de diez minutos. El trabajo realizado es una evaluación cuantitativa y cualitativa de la caracterización del viento y el potencial eólico disponible en la ciudad de Potosí, siendo un análisis detallado de cómo el viento se comporta en términos de energía. Este análisis es crucial para la evaluación del potencial eólico y para el diseño de sistemas de energía eólica. Por lo cual, los datos de la velocidad del viento se interpretaron para la gestión 2024, obteniendo velocidades máximas promedias mensuales de $3,75 \text{ km/h}$ y las direcciones predominantes del viento es norte, este, sureste y sur. El análisis cualitativo corresponde al cálculo del potencial eólico el cual se realizó a partir de las variables atmosféricas registradas en la estación meteorológica, obteniéndose un potencial eólico media anual a 2m del suelo de $0,45 \text{ W/m}^2$. Par ello También se evalúa el comportamiento del viento a partir de las distribuciones relativas y la rosa de vientos para la gestión 2024.

Palabras clave: Caracterización del recurso eólico, distribuciones relativas, energías renovables, potencial eólico.

ABSTRACT

The Profel Clima weather station of the Physics program at the Tomás Frías Autonomous University is located at a longitude of -19.55537030 and a latitude of -65.76340450 , at an altitude of 3,767 meters above sea level. Atmospheric variables are recorded here, including wind direction and speed, solar radiation, relative humidity, temperature, and barometric pressure, in seasonal, monthly, and daily periods with ten-minute intervals. The work carried out is a quantitative and qualitative evaluation of wind characterization and available wind potential in the city of Potosí, providing a detailed analysis of wind energy behavior. This analysis is crucial for assessing wind potential and for the design of wind energy systems. Therefore, the wind speed data were interpreted for the 2024 management, obtaining average monthly maximum speeds of and the predominant wind directions are north, east, southeast and south. The qualitative analysis corresponds to the calculation of the wind potential which was carried out from the atmospheric variables recorded at the meteorological station, obtaining an average annual wind potential at 2m from the ground of $0.45W/m^2$. For this purpose, wind behavior is also evaluated from the relative distributions and the wind rose for the 2024 management.

Key words: Characterization of wind resources, relative distributions, renewable energies, wind potential.

INTRODUCCIÓN

Los procesos de transición energética se han concentrado hasta ahora en la matriz de generación eléctrica en América Latina y el Caribe, sin embargo, considerando que la electricidad representa en la actualidad alrededor de un 20 % del consumo final de energía en la región y más del 60 % de este consumo corresponde a fuentes de energía de origen fósil, es prioritario invertir mayores esfuerzos en la descarbonización de los sectores de consumo final, sobre todo en los más intensivos en el uso de energía como son el transporte y la industria (OLADE, 2023).

La energía eólica en Bolivia se encuentra en el proceso de generación eléctrica como se tiene en la provincia Cordillera de la Ciudad de Santa Cruz que se instaló el parque eólico el Dorado, que está compuesto por 15 aerogeneradores y cada uno contempla una capacidad de generación de 3,6 MW de potencia, que se encuentran instalados sobre una superficie de 63,3 hectáreas, generando un total de 54MW de potencia, que se conectan al sistema Interconectado Nacional (UCOM-MHE, 2021).

Bolivia alcanzo mayor generación de energía eólica en el año 2023, generando 56,6 GWh entre las cuatro centrales eólicas operadas por la Empresa Nacional de electricidad como ser: Parque eólico

Qollpana en Cochabamba y los parques eólicos Warnes, San Julián y el Dorado en Santa Cruz. (ENDE CORPORACIÓN).

El objetivo de la investigación es caracterizar el potencial eólico del viento en la ciudad de Potosí de la provincia Tomás Frías. La caracterización del recurso eólico permitirá planificar proyectos de energía eólica sobre la factibilidad de instalaciones de aerogeneradores u otros proyectos inherentes a las velocidades del viento que se registra en la ciudad de Potosí, específicamente en la Ciudadela Universitaria.

MATERIALES Y MÉTODOS

Ubicación geográfica del estudio

El estudio se realizó con datos proporcionados por la Estación Meteorológica Profel Clima de la Carrera de Física de la Universidad Autónoma Tomás Frías, que se encuentra ubicada en la ciudadela Universitaria a una longitud -19.55537030 y latitud -65.76340450 a una altura de 3767 msnm.

Recolección y tratamiento de datos

El viento es el movimiento del aire que se produce principalmente debido a la diferencia de presión atmosférica, para su análisis e interpretación de los resultados se requiere utilizar técnicas estadísticas para pronosticar el comportamiento de la velocidad de viento en las distintas zonas de la tierra.

Los datos son recolectados en la estación meteorológica Profel Clima de la Carrera de Física de la Universidad Autónoma Tomás Frías para la gestión 2024 con un anemómetro DAVIS instalado, la recolección de datos se realizó en intervalos de 10 minutos durante un año, estos valores de la velocidad y la dirección del viento, fueron evaluados con métodos estadísticos, para estas operaciones se utilizó el software Microsoft Excel.

Distribución de Weibull para velocidades del viento.

La distribución de Weibull ha demostrado ser una herramienta estadística extremadamente útil para modelar la variabilidad de la velocidad del viento en un sitio específico. Se trata de una distribución de dos parámetros, que indican las características promedias del viento en el lugar establecido. Conocida también como la función de probabilidad acumulada y está dada por:

$$F(v) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} \quad (1)$$

Siendo:

v : velocidad del viento

k : factor de forma.

c : factor de escala (m/s). valor próximo a la velocidad media anual.

La ecuación (1) es discreta, para determinar los parámetros c y k se obtendrán por el método de análisis de regresión entre los valores de la variable y su probabilidad acumulativa, utilizando la transformación logarítmica y el método de mínimos cuadrados, como se expone a continuación,

$$\ln[-\ln(1-F(v))] = k \ln v - k \ln c \quad (2)$$

Realizando el cambio de variable: $y = \ln[-\ln(1-F(v))]$ y $x = \ln v$

La ecuación (2) se escribe de la siguiente forma $y = ax + b$, y por el método de mínimos cuadrados encontramos las constantes de forma y de escala k y c . $k = a$ y $c = e^{-b/a}$. Los factores de forma y escala son de importancia, debido a que por medio de estos se determina la probabilidad de ocurrencia de valores altos de velocidad.

Una vez calculado los parámetros de Weibull, se calculó la probabilidad de la velocidad media del viento, aplicando la ecuación (3).

$$F(v) = \frac{k}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} \quad (3)$$

Con los datos encontrados de la velocidad se realizó la estimación del potencial eólico disponible en el lugar establecido, por unidad de área, aplicando la siguiente ecuación.

$$P(v) = \frac{1}{2} \rho v^3 \quad (4)$$

Donde:

ρ : es la densidad del aire, kg/m^3

v : es la velocidad media del viento, m/s

La ecuación (4) nos permite seleccionar si el lugar de estudio resulta provechoso para la explotación de la energía eléctrica.

La densidad del aire para el sitio seleccionado se obtuvo mediante la ecuación (5):

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (5)$$

Donde:

P : Presión absoluta, Pascales (Pa)

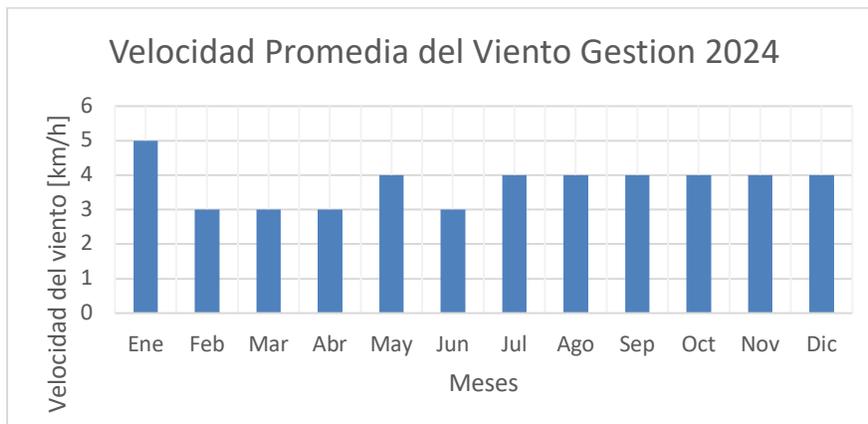
T : Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)

R : Constante Universal de los gases ideales $\left(287,04 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{K}}\right)$

RESULTADOS

Para la caracterización de la velocidad del viento en la ciudad de Potosí se analizaron los datos registrados por intervalo de 10 minutos, registrándose entre un total de 51680 datos en los diferentes meses del año.

Figura 1: Registro de la velocidad de viento de la Estación meteorológica de la carrera de Física para la gestión 2024



Fuente: Elaboración Propia

En la figura 1, se muestra el registro de datos de la velocidad de viento para el periodo 2024, el cual nos proporciona un promedio anual de la velocidad del viento de 3,75 km/h, en la Estación Meteorológica de la carrera de Física.

Distribución estadística de la velocidad media diaria de la gestión 2024

La tabla 1, de distribución nos muestra la clasificación de los datos de la velocidad de viento por intervalos, es decir a medida que aumenta la velocidad del viento la frecuencia de clase disminuye haciendo un total de 365 datos y con ellas se determina la frecuencia relativa y la frecuencia acumulada que siempre termina en uno.

Tabla 1: Distribución de frecuencias de la velocidad de viento para la gestión 2024

Intervalo de Clase [km/h]	Centro de la Clase [km/h]	Frecuencia de la Clase $n_i(\text{días})$	Frecuencia Relativa $f_i = \frac{n_i}{N}$	Frecuencia relativa acumulada "menor o igual que" F_i	Frecuencia relativa acumulada "mayor que" $F'_i = 1 - F_i$
0 < v < 1	0,5	13	0,036	0,036	0,964
1 < v < 2	1,5	25	0,068	0,104	0,896
2 < v < 3	2,5	126	0,345	0,449	0,551
3 < v < 4	3,5	124	0,340	0,789	0,211
4 < v < 5	4,5	56	0,153	0,942	0,058
5 < v < 6	5,5	14	0,038	0,981	0,019
6 < v < 7	6,5	4	0,011	0,992	0,008
7 < v < 8	7,5	2	0,005	0,997	0,003
8 < v < 9	8,5	1	0,003	1,000	0,000

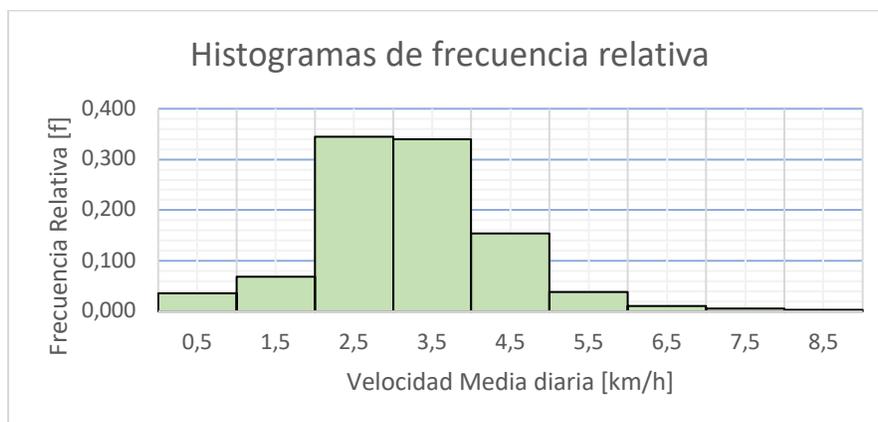
N = 365

Fuente: Elaboración propia

Histogramas de frecuencia.

El histograma de frecuencia relativa nos muestra que para la velocidad de 2,5 km/h, el viento sopla durante un tiempo de 34% aproximadamente en ese intervalo y para una velocidad de 5,5 km/h el viento sopla un tiempo 4% aproximadamente. Donde la velocidad de viento en la estación meteorología no es aprovechable para generar energía, porque la velocidad del viento es menor a 3 m/s.

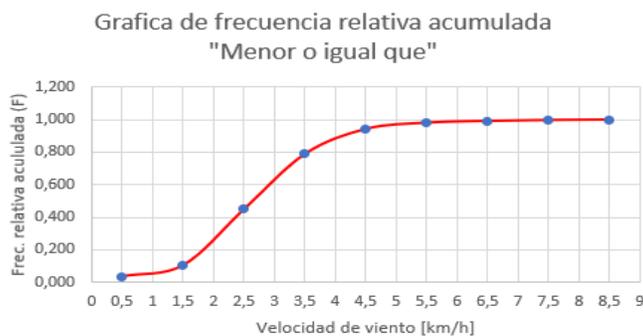
Figura 2: Histograma de la velocidad de viento



Fuente: Elaboración Propia

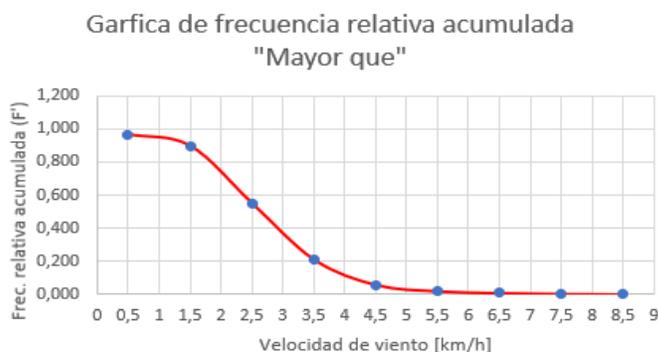
Obteniendo las curvas de la duración de la velocidad o curva de velocidades frente a frecuencia relativa acumulada.

Figura 3: Curva de duración de viento estación meteorológica Carrera de Física gestión 2024



Fuente: Elaboración Propia

Figura 4: Curva de duración de viento estación meteorológica Carrera de Física gestión 2024



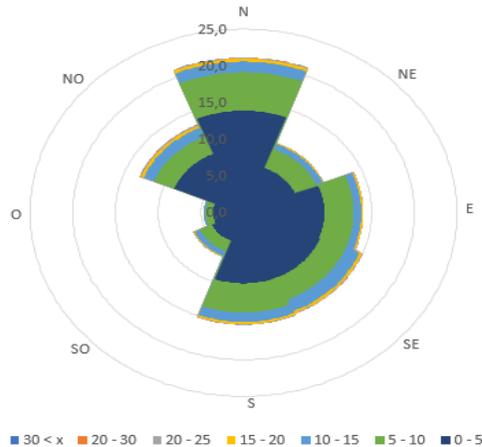
Fuente: Elaboración Propia

La distribución de frecuencias de los meses analizados tiene el mismo perfil asimétrico hacia la derecha y las velocidades máximas registradas fueron de 5 km/h para enero, 4 km/h para mayo y 4,1 km/h para los meses julio a diciembre.

La dirección predominante del viento se muestra en la gráfica 5, para la estación meteorológica de la gestión 2024, en la misma se aprecia la dirección preponderante del viento para un determinado intervalo de la velocidad del viento.

Figura 5: Rosa de vientos de la región de Potosí

ROSA DEL VIENTO PARA LA ESTACION UATF GESTION 2024



Fuente: Elaboración Propia

Los datos registrados diarios para la gestión 2024 oscilan entre 2,5 a 3,5 km/h de los cuales los predominantes corresponden al 21,1% están en dirección norte, el 14,0% al este, el 15,0% al sureste y el 15,3% al sur, que corresponden a las velocidades.

Aplicando la metodología descrita anteriormente se determina los parámetros de Weibull k y c , para el lugar establecido correspondiente a cada mes, las gráficas de función de densidad de probabilidad dependen del factor de forma k y factor de escala c el cual se muestra en la siguiente tabla 2.

Tabla 2. Media de los valores de los parámetros de la estación

Valores Medidos para 2 m	
k	2,05
c (km/h)	3,045

Considerando la temperatura promedio anual de 11,8 °C, la velocidad del viento promedio anual para una altura de 2 metros sobre el nivel suelo es 1,04 m/s y la presión barométrica promedio anual de 65029 Pascales para la gestión 2024. Estas variables permitieron calcular la densidad del aire y el potencial eólico disponible para la Ciudad de Potosí, específicamente para la ciudadela Universitaria de la U.A.T.F.

Tabla 3. Densidad del aire y el potencial eólico

Estación	Velocidad de viento [m/s]	Densidad del aire [kg/m ³]	Potencial Eólico [W/m ²]	Potencial del recurso
Carrera de Física	1,04	0,795	0,45	NO recomendable

DISCUSIÓN

Para el estudio de las energías renovables, especialmente en el contexto de la energía solar y eólica, se utilizan estaciones meteorológicas satelitales que proporcionan datos que ayuda a realizar el estudio preliminar sobre la radiación solar, el viento, la temperatura, la presión barométrica y la humedad. Para obtener datos específicos para Bolivia, los satélites que se puede aplicar es la NOAA como GOES y los satélites europeos como Meteosat, son especialmente útiles debido a su cobertura geográfica y la calidad de los datos que proporcionan. Además, el uso de datos provenientes de satélites globales como de NASA y la ESA que ayuda a obtener una visión más completa.

En la revista Bolivia de Física publicado el artículo características del viento y del potencial eólico del altiplano central (Patacamaya departamento de La Paz 2015) con los datos recolectados de la estación meteorológica de Patacamaya, donde realizaron el análisis de los valores del potencial eólico indicando que es suficientemente alto como para permitir el aprovechamiento del viento como una fuente alternativa, registrándose la velocidad promedio de 3,44m/s con direcciones unidireccionales al noroeste y potencia eólico 13,44 W/m² registrados en verano en 2012.

Para la caracterización del Potencial eólico y la velocidad del viento es muy importante estudiar las tendencias diarias, mensuales y anuales, que permiten visualizar las variables atmosféricas específicamente la velocidad del viento, registrada en la estación meteorológica de la carrera de Física de la U.A.T.F.

La velocidad del viento promedio registrada para la gestión 2024 es de 1,04m/s con direcciones unidireccionales al norte, este, sureste, sur y noroeste y el potencial eólico es de 0,45 W/m², el cual nos indica que no es suficientemente alto como para aprovechar el viento como una fuente alternativa.

CONCLUSIONES

El presente estudio sobre la caracterización del viento y potencia eólica disponible en la región de la ciudad de potosí, es imprescindible para el dimensionamiento e instalación de los generadores eólicos y otros proyectos inherentes a la velocidad del viento. Siendo la velocidad del viento dependiente de la temperatura del medio, de acuerdo a los datos registrados se pude indicar que en la época de verano las velocidades llegan a registrarse de 1,11 m/s en cambio en la época de invierno llega a registrarse de 1,02 m/s.

La densidad de potencia eólica determinado para la ciudadela Universitaria - Potosí tiene un valor promedio anual de 0,45 W/m² y la velocidad promedio anual para la gestión 2024 es de 1,04 m/s y la dirección del viento dominante corresponde al norte con un 21,1%, 14,0% al este, 15,0% al sureste y el 15,3% al sur, siendo estos datos relativamente bajos para la altura de 2 m sobre el nivel del suelo. Estimando la altura a 24 m tiende a aumentar la velocidad del viento como la densidad de potencia eólico.

Nuestro estudio es único en el sentido que se basa sobre datos recolectados en campo, a intervalos específicos y cortos, por lo que podría ser importante para verificar futuros modelos y

simulaciones. Confiamos que este será un punto de partida para el desarrollo y diversificación de la matriz energética del departamento de Potosí.

El régimen de vientos en la zona para el periodo de evaluación es relativamente constante desde 3 a 4 km/h, mientras para el mes de enero es de 5 km/h el cual presenta un régimen de viento irregular, con ráfagas, que es propio de sistemas montañosos.

REFERENCIAS

- Campoverde, A. S. B. (2021). *Caracterización del viento y temperatura aparente en los cañones urbanos del centro histórico de Cuenca, Ecuador. Conservar Patrimonio*, 36, 90-105.
- Carreno-Madinabeitia, S., Sáenz, J., Ibarra Berastegi, G., & Ulazia, A. (2022). *Evolución de la densidad de potencia eólica offshore en costas de la Península Ibérica estimada por reanálisis*.
- Corte, D. M., Sierra, F., & Valencia, G. E. (2015). *Validación del modelo matemático "Función de Densidad de Probabilidad (PDF) de Weibull", evaluando el recurso eólico en la zona del Caribe colombiano: caso estudio. Prospectiva*, 13(2), 38-46.
- Cuevas, N. R. (1961). *Variación de la velocidad del viento con la altura en un punto. Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*.
- Montes, D. P., Solano, A. D. Á., & Cardozo, J. J. (2022). *Análisis del potencial eólico a través de la función de distribución de Weibull y Rosa de los vientos. LADEE*, 3(1).
- Organización Latinoamericana de Energía (OLADE), (2023) *Panorama energético de América Latina y el Caribe, Primera Edición ISBN: 978-9978-70-152-2, Copyright © OLADE*.
- Revista Boliviana de Física Universidad Mayor de San Andrés*, (2015) "Características del viento y del potencial eólico del altiplano central (Patacamaya), vol.27 no.27, Jesus Encinas, Rene Torrez, Flavio Ghezzi, & Eduardo R. Palenque, Instituto de Investigaciones Físicas, La Paz dic. 2015.
- Yancachajlla Tito, U., & Vilca Huayta, O. A. (2022). *Caracterización del viento con la función de Weibull para una zona altoandina, Laraqueri-Perú. Revista de Investigaciones Altoandinas*, 24(3), 190-198.
- Lorenzo Alfredo Enríquez-García & Hugo Oswaldo Moreno-Avilés (2020) *Características del viento y potencia eólica disponible en la región andina de la provincia de Chimborazo, Revista científica, Dominio de Ciencias*.

Coeficientes de emisión en la ley de Stefan-Boltzmann para predecir estructuras sedimentarias de la localidad de San Antonio del departamento de Potosí

Emission coefficients in the Stefan-Boltzmann law to predict sedimentary structures in the locality of San Antonio in the department of Potosi

Edwin Quispe Lugo
edwinql36@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0002-5062-2775>
Universidad Autónoma Tomás Frías
Potosí - Bolivia

RESUMEN

La radiación térmica, emitida por todos los cuerpos con temperatura superior al cero absoluto, es un fenómeno fundamental descrito por la ley del cuerpo negro de Max Planck (1858-1947), la cual vincula la intensidad y longitud de onda de la radiación con la temperatura del emisor. Este principio, esencial en termodinámica y física cuántica, sustenta aplicaciones multidisciplinarias, desde ingeniería hasta astronomía, donde la radiación infrarroja componente clave de la energía solar es instrumental en tecnologías como la fotónica térmica y la teledetección. En geología, la radiación térmica ofrece herramientas innovadoras para caracterizar estructuras litológicas. Un ejemplo paradigmático es su potencial en el estudio de las formaciones sedimentarias de la hoja Potosí Sur (comunidades de San Antonio y La Palca, municipio de Yocalla, Departamento de Potosí). La generación de bases de datos que correlacionen coeficientes de emisividad con propiedades litológicas podría revolucionar métodos exploratorios, permitiendo identificar patrones térmicos distintivos en rocas. Aunque existen avances teóricos y aplicados en teledetección térmica, persiste la necesidad de estudios in situ que validen estos modelos en contextos geológicos específicos.

Esta investigación propone profundizar en la caracterización de estructuras litológicas mediante radiación térmica, integrando datos empíricos con marcos teóricos existentes. El enfoque no solo ampliaría el conocimiento científico sobre las formaciones de Potosí, sino que también sentaría bases para aplicaciones prácticas, como la prospección mineral o el monitoreo ambiental. La combinación de técnicas experimentales y análisis cuantitativo de emisividad podría establecer protocolos estandarizados para explorar regiones con litologías complejas, contribuyendo así al desarrollo sostenible de comunidades locales.

Palabras clave: Radiación térmica, cuerpo negro, teledetección, litología, Potosí, emisividad.

ABSTRACT

Thermal radiation, emitted by all bodies with temperatures above absolute zero, is a fundamental phenomenon described by Max Planck's black body law (1858-1947), which links the intensity and wavelength of radiation with the temperature of the emitter. This principle, essential in thermodynamics and quantum physics, supports multidisciplinary applications ranging from engineering to astronomy, where infrared radiation a key component of solar energy is instrumental in technologies such as thermal photonics and remote sensing. In geology, thermal radiation provides innovative tools for characterizing lithological structures. A paradigmatic example is its potential in studying the sedimentary formations of the Potosí South sheet (communities of San Antonio and La Palca, municipality of Yocalla, Department of Potosi). The generation of databases that correlate emissivity coefficients with lithological properties could revolutionize exploratory methods, enabling the identification of distinctive thermal patterns in rocks. Although there are theoretical and applied advancements in thermal remote sensing, there remains a need for in situ studies that validate these models in specific geological contexts.

This research proposes to deepen the characterization of lithological structures through thermal radiation, integrating empirical data with existing theoretical frameworks. The approach would not only expand scientific knowledge about the formations of Potosí but would also lay the groundwork for practical applications, such as mineral prospecting or environmental monitoring. The combination of experimental techniques and quantitative analysis of emissivity could establish standardized protocols for exploring regions with complex lithologies, thereby contributing to the sustainable development of local communities.

Key words: Thermal radiation, black body, remote sensing, lithology, Potosí, emissivity.

INTRODUCCIÓN

La radiación térmica es un fenómeno que establece la transferencia de calor, ampliamente estudiado en diferentes ámbitos físicos. Según (Siegel & Howell et. al, 2015), indican que "la radiación térmica conforma un mecanismo de transferencia de calor que puede operar en el vacío y en medios continuos, teniendo en cuenta su intensidad y distribución espectral condicionadas por las propiedades térmicas de los cuerpos". según (Modest et. al, 2013), quien indica que "la radiación térmica tiene una naturaleza electromagnética, que le permite propagarse en medio material sin importar su naturaleza". Respalda las teorías planteadas juntamente con (Kreith & Bohn et. al, 2010) donde respalda indicando que "la radiación térmica es esencial en el diseño de sistemas energéticos, particularmente en aplicaciones donde se involucran altas temperaturas".

La radiación térmica es esencial en la transferencia de calor, donde los cuerpos negros emiten esta radiación en equilibrio termodinámico como indica (Planck M et. al, 1901); (Siegel et. al, 2015), llegando a establecer que la luz emitida por un cuerpo negro se denomina radiación de cuerpo negro, y constituye un modelo físico ideal para el estudio de la emisión de la radiación electromagnética (Stefan J. et. al, 1879).

Se puede establecer que la combinación de datos de radiación térmica con variables geológicas específicas, mediante el uso de modelos predictivos avanzados, mejora significativamente la precisión en la identificación de zonas con potencial de exploración de recursos naturales en el departamento de Potosí, comparado con los métodos tradicionales de exploración geológicas que no utilizan esta integración de datos en los softwares que pretenden facilitar el análisis con la tecnología de teledetección en el espectro del infrarrojo térmico según (Wang et. al, 2024). se establece que "la utilización de la teledetección es imprescindible para estudiar las anomalías térmicas que permiten relacionar temperaturas superficiales con las estructuras litológicas presentes en áreas de interés ". Diferentes estudios demuestran que la incorporación de modelos físicos y el análisis espacial relacionados con estudios geológicos y de radiación térmica ha mejorado significativamente la evaluación de zonas de interés incluyendo análisis geoespacial para delimitar zonas de interés de exploración, lo que resulta más eficiente y menos invasivo que métodos convencionales (Sen et. al, 2024). En el departamento de Potosí se conforma por ser una región rica en recursos minerales permitiendo analizar de forma más directa, simple y eficiente estas zonas permitiendo mejorar la planificación de exploraciones futuras (Hersir et. al, 2019). Los factores que fundamentalmente de sus propiedades de las rocas son su composición y sus condiciones, los diversos métodos son indispensables en el estudio petrofísico los cuales se llegan a conformar por la disciplina de la geofísica (Bell et. al, 2007). para el estudio de las propiedades físicas que presentan las rocas predominantes en que conforman grandes yacimientos de materia imprescindible en la industria, donde la utilización de imágenes satelitales son más considerados debido al gran requerimiento que representa en la actualidad se llega a utilizar con gran frecuencia la información espacial el cual es generada a partir de sensores especiales para su

procesamiento en el cual mayoría de la información se basa en generar una base de datos a partir de los métodos geofísicos los cuales facilitan el acceder a investigaciones relacionados al área los cuales representan gran cantidad de innovaciones en diferentes ámbitos de las disciplinas científicas.

MATERIALES Y MÉTODOS

En los materiales que se llegó a utilizar para el estudio se tiene:

Mapa geológico-6435, mapa topográfico, mortero metálico, tamices 1" a # 200), molde de muestra, prensa industrial, autoclave, multímetro, termómetro infrarrojo, estufa eléctrica, riel, termómetro, termopila de Moll, cables de conexión.

El método empleado consiste en una fase preliminar llegando a la recopilación bibliográfica llegando a recabar información de las zonas de interés y de las muestras utilizadas.

La segunda fase consiste en realizar una exploración a los lugares identificados para extraer muestras con métodos de recolección de muestras según manuales de muestreo QA/QC.

La tercera fase consta en la preparación de las muestras a partir de su trituración, clasificación granulométrica, y compactación en prensa industrial y autoclave.

La cuarta fase consta en toma de muestras en laboratorio a partir del experimento del cubo de Leslie conjuntamente con el procesado de los datos obtenidos.

La quinta fase consta de la elaboración de resultados y preparación de la publicación del estudio.

Se identificó tres tipos de rocas las cuales son lutitas, limolitas y areniscas los cuales se presentan en alrededores de la ciudad de Potosí los cuales fueron recolectados de manera preferente a su composición con la cantidad de 1 kilo de cada muestra recolectado en bolsas de muestreo, las mismas fueron sometidas a un proceso de molienda en mortero metálico para su tratamiento y preparación de forma homogénea llegando a conformar placas compactadas y unidas llegando a conformar un cubo hueco donde se desarrolló la aplicación de la experimentación en laboratorio según las indicaciones del experimento del cubo de Leslie (PHYWE, 2024). Obteniendo los valores requeridos y realizado una regresión de ajuste lineal (Sánchez, C et. al. 1989) para determinar la emisividad de las muestras teniendo así valores cuantitativos, se llegó a generar mapas a partir del software ArcGis 10.8 para determinar áreas de estudio al cual se relacionó los puntos de grillado de los mapas como puntos de muestreo sistemático los cuales presentan separaciones de 20 metros entre puntos. Posteriormente se realizó la obtención de las temperaturas superficiales en los diferentes puntos de muestreo con un termómetro digital donde los datos obtenidos en los diferentes puntos son introducidos en el software de ArcGis para procesar y obtener los mapas de anomalías (Sobrino, J. et. at. 2000).

Principio experimental

Considerando el cubo de Leslie en un medio en el que este a una temperatura del ambiente y del cubo de Leslie (T_c), la superficie total del cubo se puede determinar con la pérdida de calor por radiación

del cubo, el cual es debido a las características constructivas de la pila termoeléctrica de Moll (PHYWE, 2024).

La ley de Stefan Boltzmann la cual es:

$$R(T) = \alpha\sigma T^4 \quad (1)$$

También resultando:

$$E = \varepsilon\sigma(T^4 - T_a^4) \quad (2)$$

Donde:

R (T): es la emitancia radiante total de un cuerpo a una temperatura T.

σ : constante de Estefan Boltzmann equivalente a: $\sigma = 5,6697 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

T: temperatura del cubo de Leslie.

ε : emisividad total.

De esta manera se puede determinar y demostrar las radiaciones de un cuerpo.

Se denomina radiación térmica o radiación calorífica a la emitida por un cuerpo debido a su temperatura (Planck M, 1901). Todos los cuerpos con temperatura superior a 0°C emiten radiación electromagnética (Stefan, J. 1879), la intensidad radiante depende de la temperatura y de la longitud de onda considerada. En lo que respecta a la transferencia de calor, la radiación relevante es la comprendida en el rango de longitudes de onda de 0,1 μ m a 100 μ m (Dávila, H. et. al. 2012),

RESULTADOS

Resultados de las tablas experimentales.

Tabla 1. Valoración de análisis experimental de la superficie Lutita

Nº	Tc [°C]	Tc [°K]	Tc ⁴ -Ta ⁴ [°k]	Emisividad exp.	R [W/m2]	U [mV]
1	38	311	2,48*10 ⁹	0,425	49,040	1,618
2	36	309	2,24*10 ⁹	0,423	40,277	1,329
3	34	307	2,00*10 ⁹	0,419	37,133	1,225
4	33	306	1,89*10 ⁹	0,416	31,460	1,038
5	32	305	1,77*10 ⁹	0,413	23,377	0,771
6	30	303	1,55*10 ⁹	0,411	18,180	0,600
7	28	301	1,33*10 ⁹	0,407	13,068	0,431
8	26	299	1,11*10 ⁹	0,405	8,191	0,270
9	24	297	9,01*10 ⁸	0,401	1,141	0,038

Tabla 2. Valoración de análisis experimental de la superficie Limolita.

Nº	Tc [°C]	Tc [°K]	Tc ⁴ -T _a ⁴ [°k]	Emisividad exp.	R [W/m ²]	U [mV]
1	38	311	2,47*10 ⁹	0,375	52,630	1,737
2	35	308	2,12*10 ⁹	0,373	44,825	1,479
3	34	307	2,00*10 ⁹	0,370	42,024	1,387
4	32	305	1,77*10 ⁹	0,367	36,914	1,218
5	29	302	1,44*10 ⁹	0,363	29,607	0,977
6	27	300	1,22*10 ⁹	0,357	24,701	0,815
7	25	298	1,01*10 ⁹	0,351	20,030	0,661
8	23	296	7,97*10 ⁸	0,345	15,588	0,514
9	20	293	4,90*10 ⁸	0,340	9,453	0,312

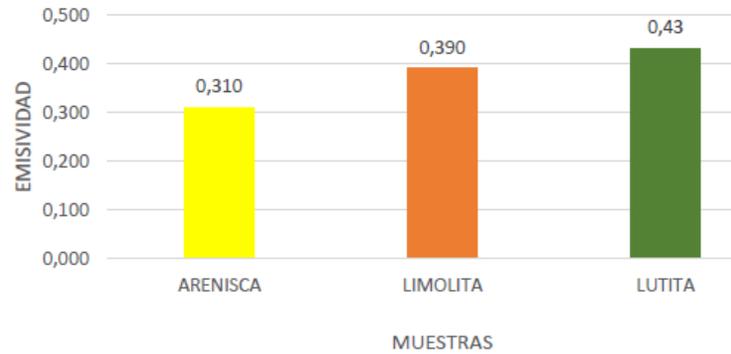
Tabla 3. Valoración de análisis experimental de la superficie Arenisca

Nº	Tc [°C]	Tc [°K]	Tc ⁴ -T _a ⁴ [°k]	Emisividad exp.	R [W/m ²]	U [mV]
1	36	309	2,24*10 ⁹	0,303	42,525	1,403
2	35	308	2,12*10 ⁹	0,298	35,812	1,182
3	33	306	1,89*10 ⁹	0,295	33,824	1,116
4	32	305	1,77*10 ⁹	0,297	29,873	0,986
5	30	303	1,55*10 ⁹	0,298	24,060	0,794
6	28	301	1,33*10 ⁹	0,294	20,342	0,671
7	27	300	1,22*10 ⁹	0,294	16,766	0,553
8	25	298	1,01*10 ⁹	0,280	12,651	0,417
9	24	297	9,01*10 ⁸	0,277	7,701	0,254

A partir de los valores obtenidos de forma experimental se llegó a determinar la diferencia de la temperatura del cuerpo con la del ambiente elevado a la cuarta potencia al igual que la emitancia radiante logrando realizar una regresión lineal entre las mismas obteniendo la emisividad experimental para cada una de las muestras

Mediante estos resultados se determinó que la emisividad experimental también se encuentra en función de la temperatura del cuerpo en diferentes rangos dependiendo de la muestra presentando una correlación directa en funciones lineales.

Figura 1. Gráfico de las emisividades de las rocas sedimentarias.



A partir de la regresión lineal también se logró obtener el valor de las emisividades del conjunto de datos de cada muestra estudiada presentando un valor mayor en las lutitas seguido de la Limolita y como un valor menor la Arenisca representando que la composición y coloración de las muestras llegan a relacionar con las teorías de los cuerpos negros.

Resultados a partir del software ArcGis.

Figura 2. Relación de los mapas generados de Lutita y Limolita.

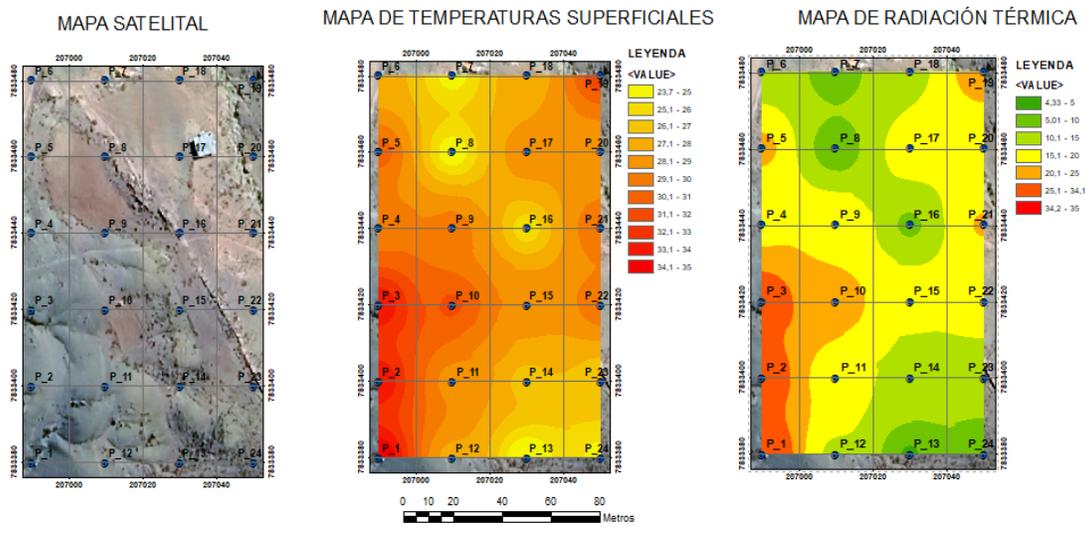
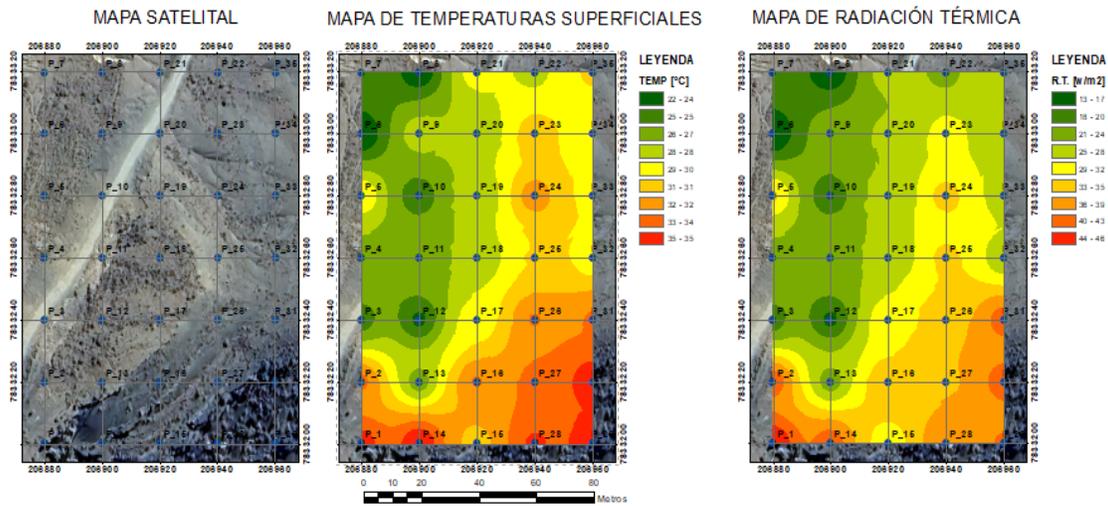


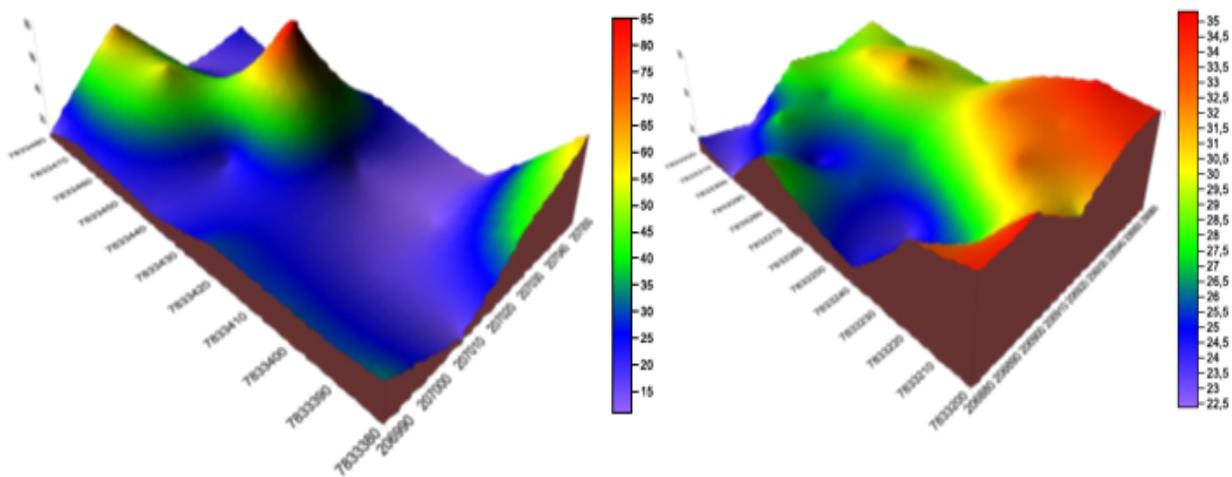
Figura 3. Relación de los mapas generados de Lutita y arenisca.



A partir del desarrollo del software ArcGis se establece que existe una correlación directa entre el color litológico con la temperatura superficial de las áreas y la radiación térmica describen una alta influencia en el contexto físico en la interacción de los fenómenos físicos con materiales litológicos de Lutita, Limolita y Arenisca.

Las relaciones directas presentan correlación directa al recibir un tratamiento como funciones lineales entre los diferentes parámetros utilizados.

Figura 4. Comportamiento de la radiación térmica observado en 3 dimensiones



Con los resultados de la radiación térmica se llegó a efectuar la modelación tridimensional en función de las coordenadas de la malla de muestreo en las diferentes áreas llegando a tener representado las zonas con mayor concentración en las zonas y como estas presentan diferencias notables entre los diferentes puntos y zonas que concentran mayor radiación térmica.

DISCUSIÓN

El estudio realizado llegó a demostrar que la emisividad no solo es fundamental para una interpretación precisa de las imágenes térmicas satelitales y aéreas, sino que también permitió considerar la caracterización litológica y la detección de alteraciones en superficie por diferentes métodos.

La evolución metodológica para determinar la emisividad de las rocas es crucial abordar las posibles inconsistencias. La preocupación radica en la variabilidad de las condiciones ambientales durante la medición, especialmente en trabajos de campo.

Los resultados sobre la emisividad de lutitas, limolitas y areniscas muestran concordancia en general con estudios previos, demostrando que la composición mineralógica y la textura de las rocas son los principales factores que controlan su emisividad.

CONCLUSIONES

Se elaboró una metodología secuencial el cual permitió desarrollar etapas que permitieron identificar la ubicación de las zonas que presentan la exposición de las estructuras litológicas permitiendo la extracción adecuada de las muestras estudiadas los cuales presentaron un protocolo adecuado para su extracción, almacenamiento y transporte de esta los cuales fueron adecuados a partir del protocolo de exploraciones geológicas.

Se determinaron experimentalmente las emisividades de muestras geológicas, obteniendo valores de Lutita = 0.43, Limolita = 0.39, y Arenisca = 0.31. mediante un termómetro infrarrojo en el sector Noroeste de la ciudad de Potosí, Bolivia.

La Lutita llega a representar mayor emisión de radiación térmica y la arenisca presenta menor emisión, este llega a ser menos emisora debido a su estructura llegando a definir que la estructura entre muestras es un factor importante para la emisión de radiación térmica debido a su tipo de interacción con la luz solar.

Mediante el estudio en zonas representativas y el parámetro de la temperatura se llegó a analizar un modelo predictivo para identificar las estructuras litológicas sedimentarias llegando a desarrollar valores que se pueden llegar a utilizar en la prospección de estas estructuras en diversas zonas que se presentan a partir de la generación de mapas temáticos relacionados en las zonas seleccionadas se llegó a identificar la relación de las temperaturas y emisividades para identificar el comportamiento de la radiación térmica.

A partir de los valores experimentales se llegó a determinar que la Lutita presenta una mayor emisividad entre las muestras llegando a presentar el valor mayor entre las muestras estudiadas llegando a ser la que presenta mayor concentración de radiación térmica, del valor obtenido se llegó a generar mapas temáticos en 3D de las concentraciones de la temperatura y radiación térmica teniendo una visualización de las variaciones de los puntos identificados mediante el modelo predictivo.

REFERENCIAS

- Boltzmann, L. (1884). Übereine von Hrn. Bartolien tdeckte Beziehung der Wärme strahlung zum zweiten Hauptsatze. *Physikalische Zeitschrift*.
- Chavez, A. (2009). La radiación térmica atmosférica y la radiación neta (Tesis de grado). Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Chuvieco, E. (1996). *Fundamentos de la teledetección espacial*. Ediciones Rialp.
- Eisberg, R. & Resnick, R. (1992). *Física cuántica*. Limusa Wiley.
- Ellison, G. N. (1979). Cálculos generalizados del factor de forma del cuerpo gris para la radiación térmica desde un canal rectangular en forma de U. *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, 2(4), 517–522.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B. & Sands, M. (1964). *The Feynman Lectures on Physics (Vol. 2)*. Addison-Wesley.
- Gautreau, R. & Savin, W. (1999). *Física moderna: Teoría cuántica de la radiación electromagnética y la materia (2ª ed.)*.
- Kittel, C. & Kroemer, H. (1980). *Thermal physics (2ª ed.)*. Freeman.
- Kuhn, T. S. (1980). *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica*. Alianza Universidad.
- Maxwell, J. C. (1865). A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.
- Planck, M. (1901). Ley sobre la distribución de energía del espectro de radiación. *Antecedentes de la evolución de la física*, 309(3), 553–563.
- Planck, M. (1914). *The theory of heat radiation (M. Masius, Trad.; 2ª ed.)*. P. Blakiston's Son & Co. <https://doi.org/10.5962/bhl.title.7154661>
- Rivas, S. & Carrasco, R. (1985). *Geología y yacimientos minerales de la región de Potosí*. Editorial Geomin.
- Siegel & Howell. (2015). *Transferencia por radiación térmica (7ª ed.)*. CRC Press.
- Stefan, J. (1879). Über die Beziehung zwischen der Warmestrahlung und der Temperatur. *Wiener Berichte*, II, 391–428.



Implementación de planta estacionaria escala laboratorio para la producción de Li_2CO_3

Implementation Laboratory-Scale stationary Plant for Li_2CO_3 Production

Abad Albis Condori
abadalcis11z@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0003-6876-7494>
Universidad Autónoma Tomás Frías
Potosí - Bolivia

RESUMEN

El propósito de esta investigación es implementar una planta continua de producción de Li_2CO_3 a escala laboratorio, para lo cual se ha determinado, que la tasa de vaporización del agua es proporcional a la fuente de calor, pero inversamente proporcional a la calidad del Li_2CO_3 . La cantidad de agua para disolver Na_2CO_3 a temperatura ambiente, responde satisfactoriamente a la calidad de Li_2CO_3 . Se ha obtenido Li_2CO_3 de 99% min para una cantidad de agua evaporada controlada en estado no estacionario. En el proceso se utiliza agua para disolver NaOH (para eliminar completamente al magnesio) y Na_2CO_3 . El caudal de flujo por método bureta no garantiza la alimentación constante de solución de Li^+ y CO_3^{2-} . Se ha encontrado que el caudal de flujo es 0.089 y 0.0068 cm^3/min para Li^+ y CO_3^{2-} , respectivamente. Las partículas de Li_2CO_3 son grandes y aparentemente homogéneos cuando la sobresaturación es controlada.

Palabras clave: Planta escala laboratorio; carbonato de litio; salmuera; estado estacionario y no.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to implement a min continuous production plant of Li_2CO_3 at the laboratory-scale, it has been determined that the water vaporization rate is proportional to heat Source but inversely proportional to quality of Li_2CO_3 . The amount of water to dissolve Na_2CO_3 at room

temperature responds satisfactorily to the quality of Li_2CO_3 . The Li_2CO_3 (99% min) has been obtained for a controlled amount of evaporated water in a non-steady state. In the process, water is used to dissolve NaOH (to remove totally the magnesium) and Na_2CO_3 . The flow rate by burette method does not guarantee the constant feeding of Li^+ and CO_3^{2-} solution. The flow rate has been found to be 0.089 and 0.0068 cm^3/min for Li^+ and CO_3^{2-} , respectively. The Li_2CO_3 particles are large and apparently homogeneous when the supersaturation is controlled.

Key words: Mini plant; lithium carbonate; brine; stationary state and not.

INTRODUCCIÓN

El carbonato de litio (Li_2CO_3) tiene peso molecular de 73.89 g/mol , el 18.78% es litio, es sólido, blanco, inodoro, granular, la temperatura de fusión es 720°C, según análisis termogravimétrico el 0.08% en peso se pierde, entre 90 – 200°C (Stober, 1986). La densidad del Li_2CO_3 es 2.11 g/cc (Co., 1985). El Li_2CO_3 , previo tratamiento químico se utiliza en la fábrica de baterías recargables o no, para dispositivos teléfono móvil, laptop, cámaras video grabadoras, mp3, etc. El litio tiene un excelente conductividad eléctrica y electronegatividad (Taliyawa, Hamma, Kwache, & Umar, 2023).

El litio es un metal altamente reactivo, en la naturaleza se encuentra combinado con otro elemento químico, siendo los más importantes; Espodumeno ($LiAlSi_2O_6$), Holmquistita $Li_2(Mg, Fe)_3Al_2Si_8O_{22}(OH)_2$, lepidolita $K(Li, Al)_3(Si, Al)_4O_{10}(F, OH)_2$, etc. Por otro lado, la fuente más importante de litio hoy en día es la salmuera, localizados en, oeste de USA, altiplano de Chile, Bolivia, Argentina y Tibet (Brooks, 2020).

El precio del carbonato de litio (99.5% Li_2CO_3 min) grado batería comercializado en China es de 74900 CNY/t (TRADING ECONOMICS, 2025) equivalente a 10355.03\$us/t. Por otro lado, el litio metálico grado industrial ($Li \geq 99\%$) y batería ($Li \geq 99.9\%$) cotiza (73708.75 USD/mt. IVA excluido) y (79191.22 USD/mt, IVA excluido) respectivamente (Mercado de Metales Shanghai. MMS, 2025).

Los principales países con recursos probados de litio (en toneladas) según presencia de empresas estatales en el sector es; >20millones, ≤20 millones, >10 millones y < 5millones en Bolivia, Argentina, Chile y México, respectivamente (U.S. Geological Survey, 2023).

En América Latina, se concentra la mayor parte de los recursos de litio identificados en el mundo (56%) (U.S. Geological Survey, 2023). Por lo cual, las empresas estatales están cobrando una nueva relevancia. En la década de 2010, solo Bolivia y Argentina contaban con empresas estatales de litio, en 2022, México creó LitióMx y Chile está discutiendo un proyecto similar (Fitzgerald, 2023).

Yacimiento de litio bolivianos (YLB) se creó en 2017 (Morales, 2022), las empresas argentinas Jujuy Energía y Minería Sociedad del Estado (Jemse) y Catamarca Minera y Energética Sociedad del Estado (Camyen). Sin embargo, Sociedad Química y minera de Chile (SQM), creada en 1963 con el 37.5% de propiedad del estado (a través del corfo) y aumentó al 100% de nacionalización en 1973, para luego ser privatizado en 1983 (Valenzuela, 2015).

Algunas empresas con participación en el sector litio: China Minmetals Corporation (CMC) 1950, Dedicada a la producción de varios minerales y metales. La empresa ha estado aumentando su involucramiento en la exploración y producción de litio en años recientes, sobre todo a través de su subsidiaria Changsha Research Institute of Mining and Metallurgy. Rosatom (Federación Rusa) 2007, Empresa enfocada tradicionalmente en el mercado nuclear, sobre todo en la extracción y el enriquecimiento de uranio. Recientemente, está diversificando su enfoque y participando en proyectos de litio. Khanij Bidesh India Limited (Kabil) 2019, Corresponde a una asociación entre varias empresas estatales (Nalco, HLC y MECL). La empresa busca producir internacionalmente minerales de transición, incluido el litio, para importarlos a la India. Ya cuenta con proyectos en Australia y Argentina, y muchas otras empresas (Fitzgerald, 2023).

Países con estado de procesamiento y refinación de litio. Carbonato de litio e hidróxido de litio, China y Chile, Argentina y Bolivia solamente producen carbonato de litio (Gielen, 2002).

SQM Litio es uno de los líderes mundiales en la producción de litio y derivados, su planta se encuentra en el Salar del Carmen cerca de Antofagasta. SQM, ofrece los siguientes productos de carbonato de litio, Grado técnico - micronizado 99% min Li_2CO_3 , Grado batería - micronizado - 99.2% min Li_2CO_3 , grado técnico cristalizado 99% min Li_2CO_3 , grado técnico - polvo 99% min Li_2CO_3 , etc. (Sociedad Química y minera de Chile, 2022)

Yacimiento de litio bolivianos (YLB) produce entre dos - tres toneladas de Li_2CO_3 /día, con características de 98.5% min Li_2CO_3 (grado técnico) y 0.5% de humedad, siendo la proyección programada de producción de Li_2CO_3 de 15000tn/año (Yacimientos de litio bolivianos, 2024).

La Universidad Autónoma Tomás Frías a desarrollado varios trabajos investigativos relevantes respecto al procesamiento y obtención del carbonato de litio a partir de la salmuera del Salar de Uyuni, provenientes de la zona Delta del Rio Grande y Zona Tahua (Manrique M., G. 2022) (Morales, 2022). En el foro internacional se presentó los resultados en relación a la cristalización de Li_2CO_3 , y se reportó >99% min Li_2CO_3 de pureza (zabuyelita por DRX) (COrdori, 2024).

El valor económico del litio es importante, y este recurso se encuentra en el Salar de Uyuni. Desde 2008 se ha dado mayor atención al litio para producir en su forma más estable como $Li_2CO_{3(s)}$. Siendo el encargo YLB y esta empresa estatal, se enfoca más en valorizar a empresas extranjeras que no tienen experiencia en temas de litio, por tanto, no considera los proyectos locales. Sin embargo, la UATF ha estado permanentemente activo en el ámbito de la investigación respecto a procesamiento de la salmuera. En base a los antecedentes, positivos respecto a la obtención o producción de $Li_2CO_{3(s)}$, es bastante coherente encarar el proceso de producción de $Li_2CO_{3(s)}$, demostrando que salmuera residual no existe, uso adecuado de H_2O , respaldar los cálculos elementales de Na_2CO_3 y otros. Los resultados alcanzados de esta investigación benefician a la población en general para tener un criterio técnico respecto a la producción de $Li_2CO_{3(s)}$.

YLB, en abril 2018, anunció la asociación con la empresa ACI-Systems Alemania (Acisa), con control mayoritario (51%) de YLB, la cual fue disuelta por razones políticas en 2019. En enero 2023, YLB firmó un convenio con el consorcio chino CBC, conformado por CATL BRNP y CMOC, para la instalación de dos complejos industriales con tecnología de extracción directa (ED) en los salares de Uyuni y Coipasa (CIEDH, 2023-25-january). También en 2023, se firmaron dos nuevos convenios para el desarrollo de este tipo de plantas, con la empresa rusa Uranium Group One (parte de Rosatom) y la China Citic Guoan (perteneciente a Citic Group) (P., 2023). Con el tiempo, en febrero del 2025, esa firma se hizo presente en la población a través de la política de “socialización”.

Los documentos de contratos alcanzaron a todas las institucionales públicas y privadas, en donde se constató que; La tecnología es ED de litio, recuperación global 80% de Li, aplican salmuera residual y natural, un cálculo elemental estequiométrico respecto a la relación Na_2CO_3/Li_2CO_3 es 1.46. No obstante, CBC reporta 1.93 (EMpresa pública nacional estratégica de yacimientos de litio bolivianos (YLB), 2024) y Uranium reporta 1.68., otro cálculo elemental de agua dulce necesario para disolver el Na_2CO_3 a 25°C respecto al LiCl (Salmuera residual o EDL) es 4.75 (tn) H_2O dulce/(tn) Li_2CO_3 . No obstante, CBC y Uranium reportan uso de 97.99 (EMpresa pública nacional estratégica de yacimientos de litio bolivianos (YLB), 2024) y 76.5 (tn) H_2O dulce/(tn) Li_2CO_3 , respectivamente. Estos datos respecto al uso de agua por dichas empresas reflejan un pésimo análisis en relación al significado físico del agua.

Para YLB, salmuera residual es una solución remanente que contienen elevado contenido de magnesio con considerables contenidos en litio 0.435% (EMpresa pública nacional estratégica de yacimientos de litio bolivianos (YLB), 2024). El litio en la salmuera presenta mayor solubilidad en agua, entonces, es el último en cristalizar formando sales complejas. Por lo tanto, no debería ni mencionarse el término “salmuera residual”. Por tanto, el problema constituye, ¿Cómo implementar una planta a nivel laboratorio para la producción continua de carbonato de litio?, por lo que el objetivo es, implementar una mini-planta continuo a nivel laboratorio para limpiar al magnesio de la solución rica en litio y carbonatación del litio para producir $Li_2CO_{3(s)}$.

Para lo cual, se respalda en las siguientes bases teóricas:

Marco termodinámico

La termodinámica implica dos ámbitos del conocimiento científico más amplio, tanto la clásica y molecular. Por lo que, la termodinámica molecular se encarga de estudiar los electrolitos volátiles o no, determina el equilibrio termodinámico de sistemas binarios, ternarios, cuaternarios, quinarios, recíprocos o no, etc. para abordar la precipitación o cristalización del carbonato de litio desde sistemas cuaternarios recíprocos es importante considerar el equilibrio termodinámico, basándose en datos y modelos termodinámicos existentes en la literatura.

Reacción química

La mezcla de reactivos en solución como $LiCl$ y $Na_2CO_{3(ac)}$ forman únicamente productos $Li_2CO_{3(s)}$ y $NaCl$. Para conocer, la secuencia de precipitación de los productos entonces se acude a la

termodinámica de electrolitos. La constante del equilibrio termodinámico (K_{SP}) para el $Li_2CO_{3(s)}$ está dada por (Cheng, Li, & Cheng, 2013):

$$K_{SP} = (m_{Li^+} \gamma_{Li^+})^2 (m_{CO_3^{2-}} \gamma_{CO_3^{2-}})$$

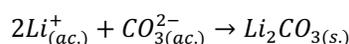
Donde m y γ son la molalidad (mol/kg) y el coeficiente de actividad para las especies cuando la solución está en equilibrio. Yi et al. (2010), reportó el equilibrio termodinámico (K_{SP}) del $Li_2CO_{3(s)}$, para diferentes isotermas basado la ecuación:

$$\ln K_{SP} = A + \frac{B}{T} + C \cdot \ln T + D \cdot T$$

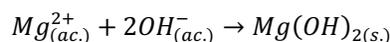
Donde T es la temperatura absoluta y los coeficientes A, B, C y D son: -32.672, 3653.6, 12.591 y -0.11259, respectivamente. El K_{SP} para $Li_2CO_{3(s)}$ es $8.15 \times 10^{-4} (mol/kg)^3$ a $30^\circ C$ (Chen, Jhuang, Tseng, & Lin, 2024).

Carbonatación del litio en el sistema of Na-K-Li-Cl-CO₃-H₂O system entre 20 y $90^\circ C$ (Cheng, Li, & Cheng, 2013). El $Li_2CO_{3(s)}$, precipita y es la única fase en el sistema. Sin embargo, la presencia de magnesio en la solución conduce a la precipitación del $MgCO_{3(s)}$, lo cual impurifica al $Li_2CO_{3(s)}$. Cheng W. et al., (2013) reportó la comparación de la solubilidad del $MgCO_3 \cdot 3H_2O$ y $Li_2CO_{3(s)}$ en $NaCl_{(ac.)}$ a $25^\circ C$, por lo que, el $MgCO_3 \cdot 3H_2O$ cristaliza antes que el $Li_2CO_{3(s)}$.

La reacción en el sistema Na-K-Li-Cl-CO₃-H₂O o Na-Li-Cl-CO₃-H₂O, exento de magnesio, resulta según la siguiente ecuación química.



En caso de existir presencia de magnesio, se debe eliminar utilizando reactivo, siendo la siguiente ecuación química.



En base a la ecuación química de eliminación del magnesio, se puede apreciar que la concentración de sodio se incrementa aún más. Sin embargo, la presencia de Na^+ no interfiere y esto podría tener su limitación, ya que, tendería a co-precipitar como $Na_2CO_{3(s)}$ lo cual compromete la pureza del $Li_2CO_{3(s)}$.

MATERIALES Y MÉTODOS

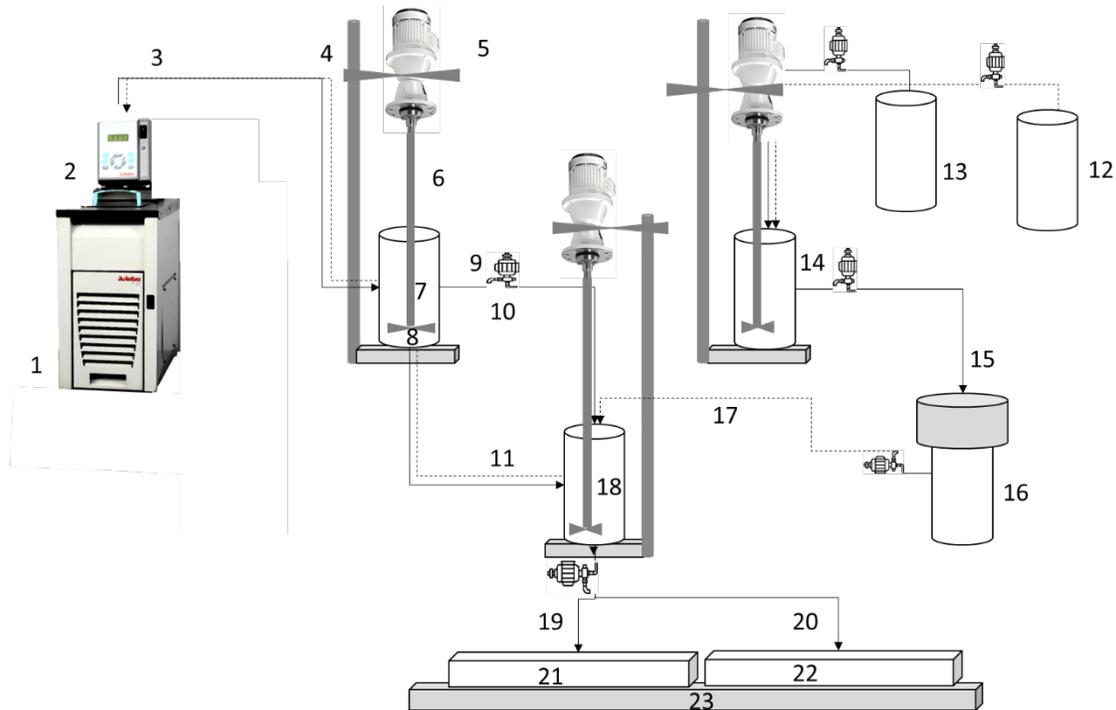
Equipos y reactivos

Se prepara una solución de salmuera artificial constituida por Li^+ (6g/L), Mg^{2+} (20g/L) y Cl^- . Para lo cual, se ha utilizado $LiCl$ (99% pureza, p.a.), $MgCl_2 \cdot 6H_2O$, Na_2CO_3 , $NaOH$ y H_2O destilada. Para determinar la fase sólida de $Li_2CO_{3(s)}$ se ha empleado el equipo de difractor de rayos X, que está ubicado en laboratorio de química de la UATF (miniflex300 industria japonesa), microscopio óptico digital, bureta de 50 y 25 ml.

Configuración experimental para el proceso de precipitación continuo de Li_2CO_3 .

Figura 1.

Configuración experimental para producir carbonato de litio en estado estacionario a escala laboratorio. Los accesorios y corrientes se detallan al pie de la figura.



Configuración experimental para el proceso de obtención de Li_2CO_3 . 1. Termostato, 2. Tablero de control, 3. Circulación de agua, 4. Soporte universal, 5. Motor del agitador mecánico, 6. Eje de transmisión, 7. Reactor encaquetado, 8. Propulsores, 9. Corriente solución Na_2CO_3 , 10. Bomba peristáltica, 11. Corriente de circulación de agua, 12. Solución alcalina, 13. Solución de litio con contenido de magnesio, 14. Reactor para el proceso de limpieza de la solución de litio, 15. Corriente de solución heterogénea, 16. Sistema de separación sólido líquido, 17. Corriente de solución de litio exento de magnesio, 18. Reactor encaquetado para la precipitación parcial de Li_2CO_3 , 19 y 20. Corriente intermitente de solución heterogénea (sólido-líquido), 21 y 22. Cristalizador convencional para el crecimiento de cristales de Li_2CO_3 y 23. Termoagitador magnético.

Los componentes y corrientes de flujos presentados en la **Figura 1**, son establecidos en base a las experiencias acumuladas respecto a la obtención del carbonato de litio a nivel laboratorio y de forma no estacionaria. Con respecto a la obtención de carbonato de litio en la modalidad no estacionaria es muy común que básicamente no requiere mucho esfuerzo, salvo sea, el estudio cinético de cristalización, sobresaturación, diagrama de fases, aditivos, diagrama de fases con o sin siembra, etc.,

Proceso de evaporación del solvente en el sistema Li^+ , Na^+ , Mg^{2+} , Cl^- - CO_3^{2-} - H_2O .

Para el proceso de precipitación del Li_2CO_3 a partir del sistema Li^+ , Na^+ , Mg^{2+} , Cl^- - CO_3^{2-} - H_2O , en estado no estacionario, ha sido conveniente monitorear la tasa de evaporación del solvente, para lo cual se ha empleado, un recipiente de vidrio circular (base de caja Petri) de 15 cm de diámetro y 2 cm de altura, la transferencia de calor se hizo por convección al poner en contacto la base caja Petri con la superficie de la plancha eléctrica. Por tiempos aleatorios continuo se ha medido el peso resultante de la solución

en una balanza $\pm 0.01g$. Esta misma experiencia se replicó, pero utilizando únicamente solvente, recipiente 10 cm de altura y 384 cm^2 de área.

Proceso de descarga de líquido por el método bureta y bomba peristáltica

El caudal de flujo de descarga de un líquido se ha determinado utilizando bureta de 50 y 25 ml, y un cronómetro. Se apertura la válvula de la bureta para una cantidad definida de gotas de líquido. Por cada, mililitro (ml) de solución se registra el tiempo transcurrido. Con los datos, se ha calculado la tasa de descarga (ml/min) para cada instante de tiempo.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

La presentación de resultados en este documento consta de dos partes; la primera resultados de las pruebas de obtener Li_2CO_3 a través de un proceso convencional que solamente monitorea el corte de evaporación, de tal forma que precipite el Li_2CO_3 , y la segunda parte consta de resultados de obtención de carbonato de litio a través de un proceso convencional sistematizado en donde se considera el monitoreo de la tasa de evaporación del solvente, monitoreo de la temperatura en el cristizador, determinación del flujo del caudal de descarga de reactantes método bureta y bomba de agua, para encontrar el caudal adecuado.

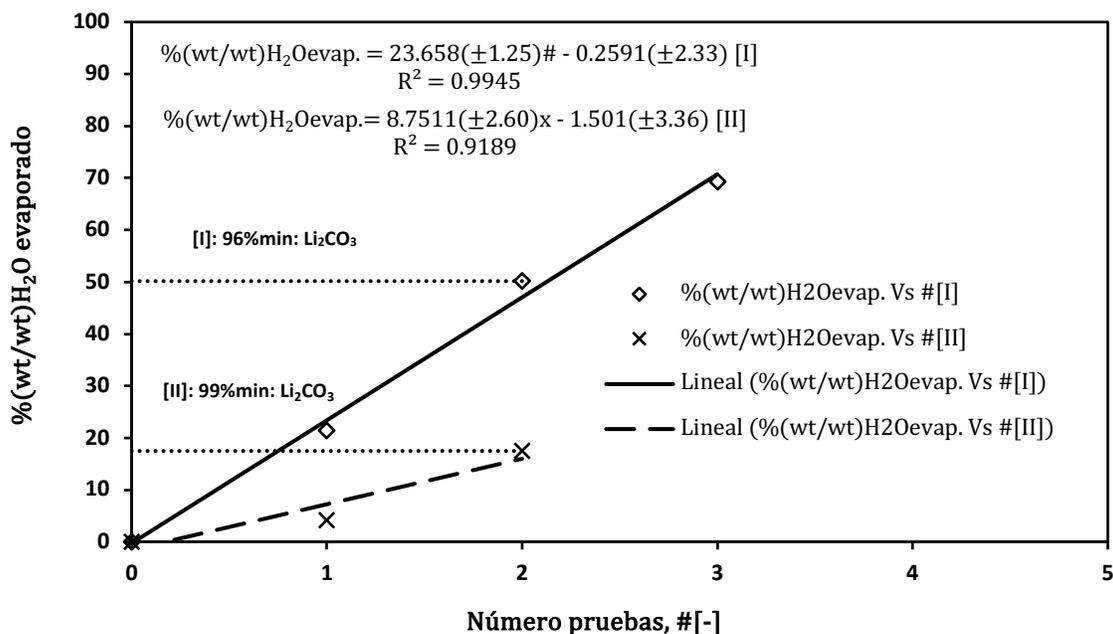
Primera parte

Evaporación del solvente en el sistema $Li^+-Na^+-Cl^- -CO_3^{2-}-H_2O$ a temperatura $>30<50^\circ C$. prueba I y II.

La **Figura 2**, corresponde a la evaporación del solvente del sistema $Li^+-Na^+-Cl^- -CO_3^{2-}-H_2O$, para separar el Li_2CO_3 , a menor y mayor intensidad de calor (I y II), obteniéndose, Li_2CO_3 del 96 y 99% min de pureza, respectivamente.

Figura 2.

Porcentaje de agua evaporada del sistema acuoso $\text{Li}^+ - \text{Na}^+ - \text{Cl}^- - \text{CO}_3^{2-} - \text{H}_2\text{O}$ a temperatura $>30 < 50^\circ\text{C}$. prueba I y II.

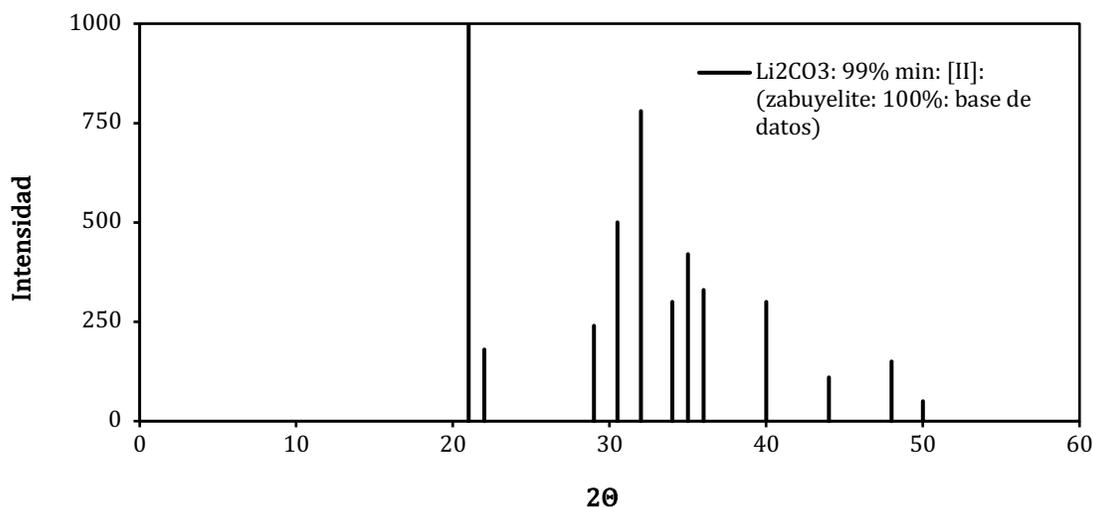


Difractograma de rayos X (DRX) del $\text{Li}_2\text{CO}_3(\text{s})$.

El Li_2CO_3 obtenido por las dos condiciones I y II, se sometieron al difractómetro de rayos X. En la **Figura 3**, se observa el difractograma del Li_2CO_3 (condición II), refleja 99% min de pureza, lo cual implica que la evaporación controlada del solvente contribuye a una cristalización de Li_2CO_3 de mayor pureza.

Figura 3.

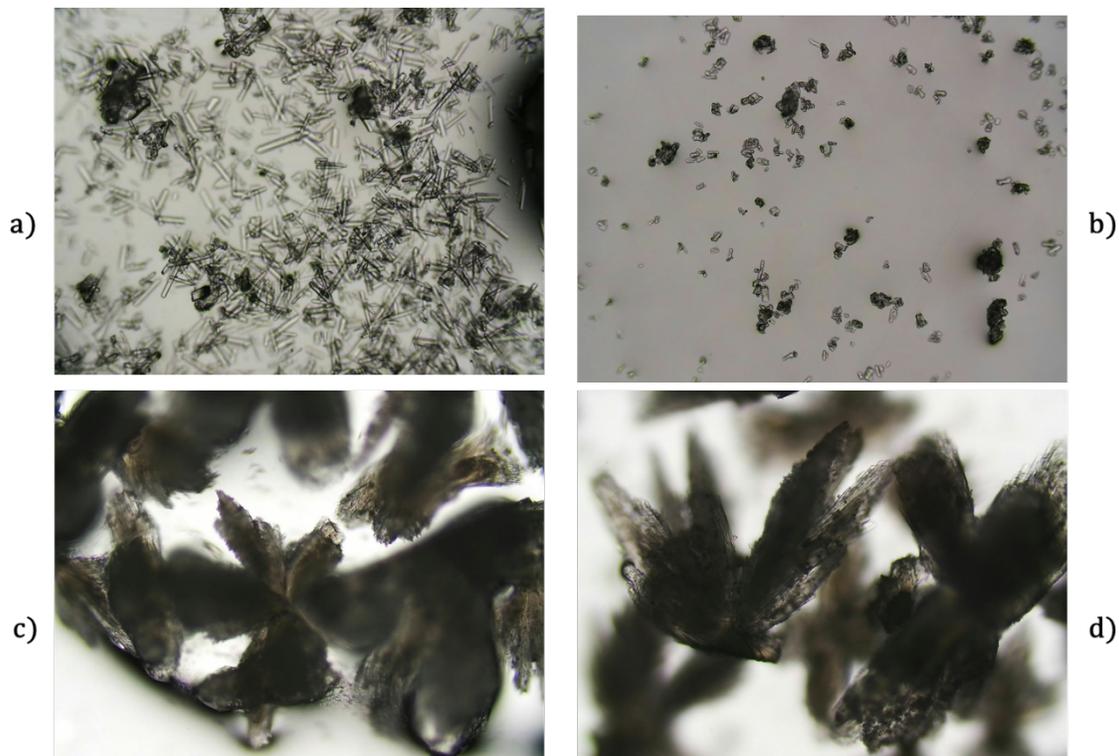
Difractograma del carbonato de litio obtenido por la condición II. La base de datos que tiene DRX: MiniFlex-300: Rigaku; Instalado en la boratorio de Química-UATF; reporta el 100% Zabuyelite (CLi_2O_3)



Además, de conocer la fase cristalina del producto obtenido, se ha sometido los cristales a un microscopio óptico, para comparar la distribución de tamaño de partículas o simplemente la forma geométrica. En la **Figura 4**, se presenta las partículas de Li_2CO_3 para la condición I y II. Las partículas de Li_2CO_3 en II, son grandes de forma pétalos y aparentemente de tamaños uniforme, lo contrario muestra en I, cristales rectangulares, largos y cortos. Sin embargo, los cristales de Na_2CO_3 son en forma totalmente diferente al Li_2CO_3 . SQM-2022 clasifica al $Li_2CO_3(s.)$ de 99% min de pureza como grado batería, en este trabajo se ha obtenido $Li_2CO_3(s.)$ grado batería en estado no estacionario, YLB-2024 produce 98.5 % min y no corresponde a ningún tipo de clasificación que hace SQM-2022. En el documento de Manrique M., G. (2022), existen dos reportes de $Li_2CO_3(s.)$ 88.79% min (2010) y 99-99.5% min (2016), ambos desde salmuera natural y en estado no estacionario, pero no muestra el DRX. Pao-Chi Cheng et al., -2024, ha obtenido $Li_2CO_3(s.)$ en estado estacionario y dando a conocer la tasa de nucleación (3.47×10^9 - 5.98×10^{12} cristales/ $m^3 \cdot s$) y crecimiento de los cristales (3.0×10^{-5} $\mu m/s$).

Figura 4.

Imágenes del Li_2CO_3 y Na_2CO_3 tomados por el microscopio óptico digital: a) Li_2CO_3 (pureza: 96%min); [I], finos (polvo), lab. Química. b) Na_2CO_3 , 99.9% min (comprado). c) y d) Li_2CO_3 (pureza: >99%); [II], lab. Química (UATF).



Los resultados de la primera parte, refleja que a menor tasa de evaporación del solvente la calidad de Li_2CO_3 obtenido es mayor, en donde, la cantidad de agua agregado es controlado para disolución del Na_2CO_3 y NaOH: No obstante, estos resultados apertura nuevos desafíos importantes: Producción

continua de Li_2CO_3 , uso de agua real durante el proceso, concentración molal o molar, caudal del fluido de entrada y salida, balance de materia y energía, de Li^+ y CO_3^{2-} , a nivel laboratorio. La distribución de tamaño de partículas es muy importante para la comercialización del producto, Pao-Chi Cheng et al., - 2024., ha determinado la sobresaturación relativa máxima de 2.04, y la morfología de los cristales de Li_2CO_3 son hilos curvados de aproximadamente 10 μm , en proceso estacionario, lo cual implica, la diferencia en producir en estado estacionario o no.

Segunda parte

Los resultados presentados en esta sección implican, la determinación de la tasa de evaporación del solvente ($\%H_2O$ vs t , $\Delta mH_2O/\Delta t$), tasa de descarga de los reactantes ($V_{ml}H_2O$ vs t , $\Delta V_{H_2O}/\Delta t$), método bureta y bomba de agua, flujo de filtración, calidad del Li_2CO_3 , y rendimiento en estado estacionario.

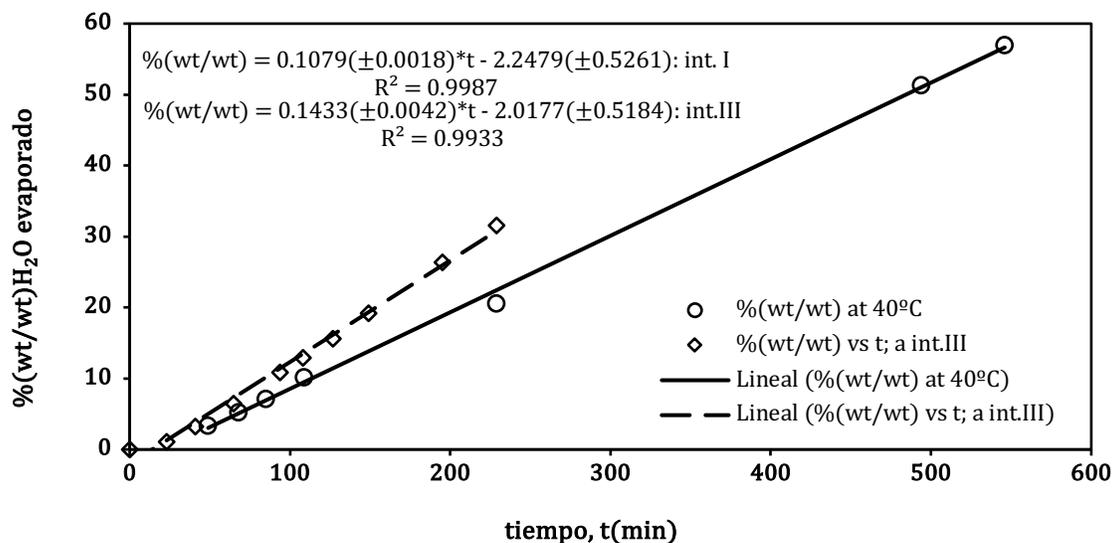
Resultados el proceso de evaporación continuo de agua.

Tasa de evaporación del agua.

El solvente se ha evaporado por convección al contacto de plancha eléctrica con la base del recipiente. La plancha eléctrica solo regula la intensidad de calentamiento y no precisa la temperatura. En la **Figura 5**, se presenta los resultados del comportamiento del $\%(wt/wt)$ H_2O evaporado con respecto al tiempo.

Figura 5.

Comportamiento del porcentaje de masa evaporado de H_2O en un evaporador convencional a $40^\circ C$ respecto al tiempo.



La fuente de calor es proporcional a la vaporización del solvente, sin embargo, no es pertinente comparar con dispositivos que aceleran la evaporación, un cristalizador sofisticado tienen incorporado deflectores, propulsores con (chaqueta, tipo, número y niveles, etc.), entonces el nivel de la solución en el reactor no es influido. Ninguno de esos accesorios tiene el cristalizador convencional en esta

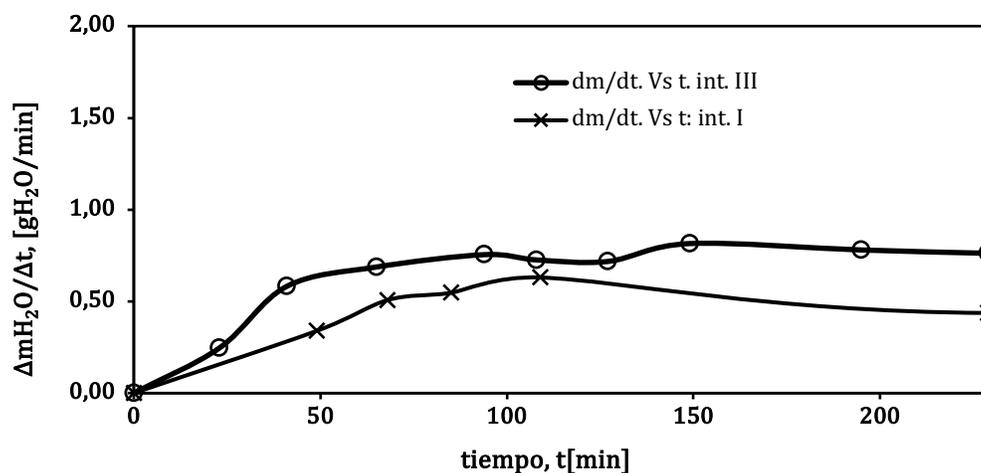
investigación, por lo que el nivel de la solución y el área del mismo podría desviar la linealidad de evaporación.

Tasa de evaporación del agua en peso.

La evaporación en peso del agua respecto al tiempo es lineal, por lo que, ha sido conveniente calcular la tasa de evaporación (g/min), en la **Figura 6** se puede apreciar que la tasa de evaporación del agua es mayor, cuando, la intensidad de calor es mayor (int. II), pero, es limitado, ya que, se alcanza un máximo por lo que se mantienen constante. Siendo, 0.51 $\text{gH}_2\text{O}/\text{min}$ y 0.67 $\text{gH}_2\text{O}/\text{min}$ la tasa promedio de evaporación del agua para int. I y II, respectivamente.

Figura 6.

Tasa de evaporación del agua en un evaporador convencional a intensidad de calor (int. I y II) vs tiempo.



La determinación de la tasa de vaporización del solvente para las condiciones convencionales es crucial, ya que, del mismo depende el caudal de flujo para alimentar al cristizador o reactores en donde se llevan a cabo la mezcla reaccionante hasta alcanza el estado estacionario. En ese sentido, se ha determinado el caudal de flujo de descarga de solución por método bureta.

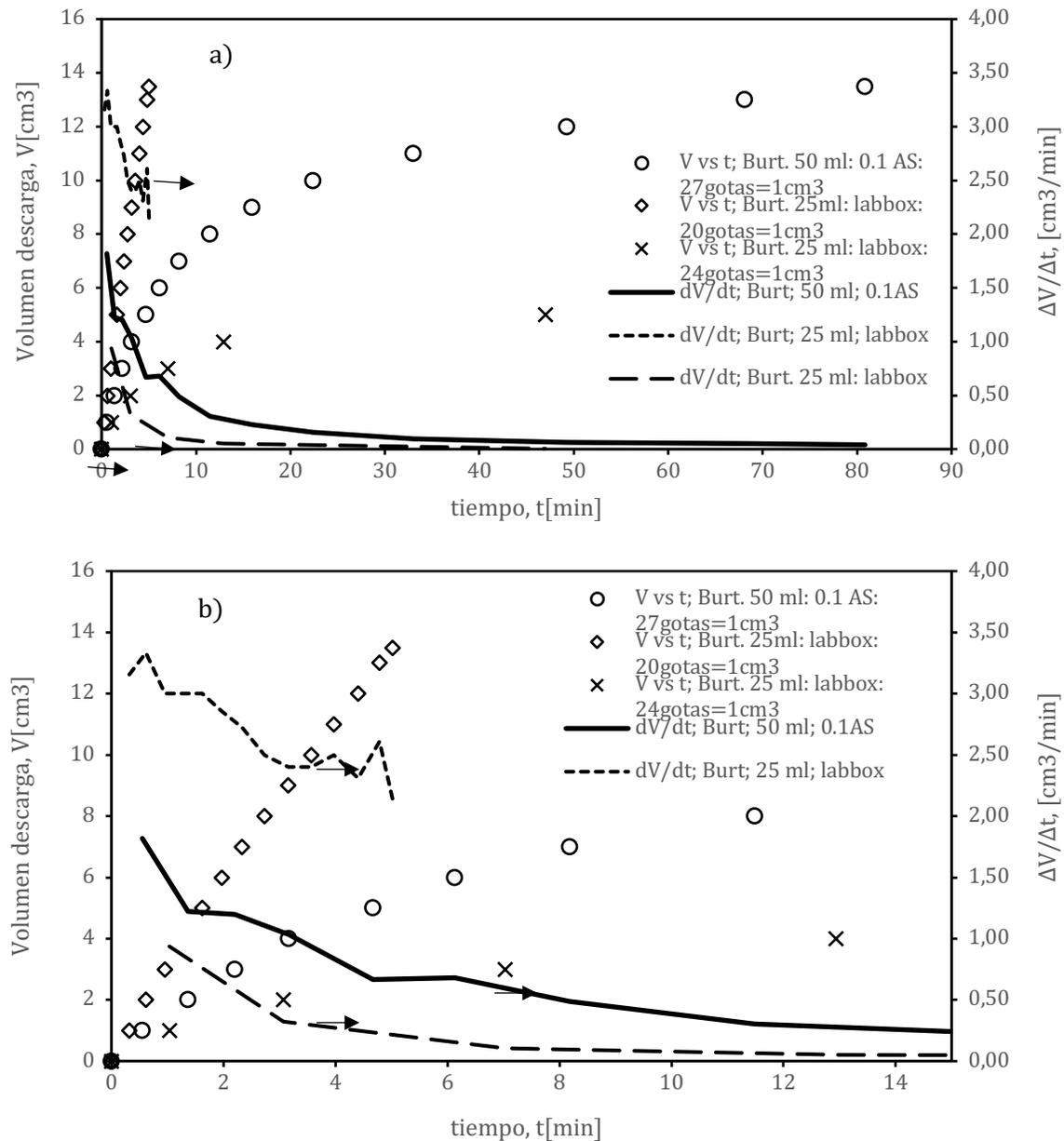
Tasa de descarga (cm^3) de solución método bureta.

El proceso de producción en estado estacionario implica conocer el caudal del flujo constante de entrada, salida, reciclo, etc., los dispositivos constituyen en su sistema de operación, control del caudal, temperatura, rpm, tiempo, tipo de propulsor, etc. (tecnologías Smart o ergonómicos), sin embargo, el caudal de flujo de los reactantes requiere la determinación objetiva y específica, ya que, las reacciones implica el consumo y formación, y las proporciones son estequiométricos, lo cual implica, cambios en la concentración de solución, solubilidad dependiente de la temperatura, reducción del consumo de agua dulce. Para tal propósito, se ha considerado dos métodos de descarga bureta y bomba "peristáltica". En la **Figura 7**, se muestran los resultados de la descarga de líquido o solución a temperatura ambiente por el método de bureta (burt.), que se asigna 27, 24 y 20 gotas equivalentes cada asignación a 1ml en burt de 50, 25 y 25 ml., respectivamente. en la misma gráfica se muestra la tasa de descarga en función

del tiempo ($\Delta V/\Delta t$ vs t). por lo que, la bomba no peristáltica usado en esta investigación no responde un caudal definido.

Figura 7.

Comportamiento de descarga de líquido en función del tiempo por el método bureta. a) Volumen de descarga $V(\text{cm}^3)$ y tasa de descarga lado izquierdo y derecho en función al tiempo, respectivamente. b) magnificado de datos gráficos del a).



La descarga de la solución por método bureta no es lineal, así como se muestra en la **Figura 7, a) y b)**. Esto implica la ralentización del caudal, conforme disminuye la columna del agua en la bureta, mostrándose al inicio la tasa de descarga es mayor y luego disminuye. Este comportamiento de la tasa,

es proporcional a la apertura de la bábula de la bureta. Por tanto, este comportamiento no garantiza un caudal de flujo constante en cada instante de tiempo. por lo que, la cantidad molar de Li y carbonato se desviará totalmente, tanto en déficit o exceso de los iones reaccionantes. Sin embargo, en base a pruebas reiterativas de tasa de descarga se ha encontrado que la tasa de alimentación de solución de litio y carbonato son; 0.089 y 0.0068 cm^3/min , respectivamente. La desventaja por este método es, el constante llenado de ambas soluciones al volumen inicial y repetitivo, la misma actividad podría incurrir en errores crasos durante el proceso. Bajo estos antecedentes, se acude a establecer el caudal de fluido a través del uso de bomba peristáltica.

Se debe presentar los principales hallazgos de la investigación, los cuales deben estar ordenados por: temas, variables y/o categorías. Presente sus resultados siguiendo una secuencia lógica y concordante con el texto, las tablas y las figuras. Usar gráficos (estandarizados con el denominativo de Figura) como una alternativa a las tablas con muchas entradas, no duplicar los datos en gráficos y tablas. En el texto, destaque las observaciones importantes, sin repetir todos los datos que se presentan en las Tablas o Figuras. No mezcle la presentación de los resultados con su discusión. La base de datos y otros documentos complementarios para la comprensión de la investigación deben ser enviados, vía correo electrónico a la revista.

CONCLUSIONES

La tasa de vaporización del agua es proporcional a la fuente de calor, pero inversamente proporcional a la calidad del Li_2CO_3 . La cantidad de agua para disolver Na_2CO_3 a temperatura ambiente, responde satisfactoriamente a la calidad de Li_2CO_3 . Se ha obtenido Li_2CO_3 de 99% min para una cantidad de agua evaporada controlada en estado no estacionario. En el proceso se utiliza agua para disolver NaOH (para remover totalmente al magnesio) y Na_2CO_3 (para carbonatar a litio iónico) y guardando estrecha relación con la solubilidad de estos. El caudal de flujo por método bureta no garantiza la alimentación constante de solución de Li^+ y CO_3^{2-} y menos aún la alimentación al cristalizador. Se ha encontrado que el caudal de flujo es 0.089 y 0.0068 cm^3/min para Li^+ y CO_3^{2-} , respectivamente. Las partículas de Li_2CO_3 son grandes y aparentemente homogéneos cuando la sobresaturación es controlada.

CONFLICTO DE INTERESES

El autor declara, que no existe conflicto de intereses para la publicación del presente artículo científico.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento profundo a la Universidad Autónoma Tomás Frías y a la carrera de Química, por brindar el uso de la infraestructura, materiales, reactivos y equipos de análisis.

REFERENCIAS

- Brooks, K. (2020). Lithium minerals. *Minerals explained* 58, 36(5), 192-197.
- Chen, P.-C., Jhuang, J.-H., Tseng, C.-E., & Lin, a. Z.-Y. (2024). Crystallization Kinetics of Lithium Carbonate in a Continuous Stirred-Tank Crystallizer. *Crystals*, 14(1021), 1-13.
- Cheng, W., Li, Z., & Cheng., a. F. (2013). Solubility of Li_2CO_3 in Na-K-Li-Cl brines from 20 to 90 °C. *J. Chem. Thermodynamics*, 67, 74-82.
- CIEDH. (2023-25-january). *Consortio de emrepsas chinas firma contrato con YLB para industrialización y exportación de carbonato de litio*. Bolivia: Información sobre empresas y derechos humanos.
- Co., R. (1985). *Handbook of Chemistry and Physics*.
- COndori, A. A. (2024). *Procesos analíticos y químicos aplicados a la salmuera del Salar de Uyuni para obtener Li_2CO_3 y otros (2008-2024)*. Potosí: UATF.
- EMpresa pública nacional estratégica de yacimientos de litio bolivianos (YLB). (2024). *Anexo técnico: "Planta de salmuera residual"*. La Paz: EStado Plurinacional de Bolivia.
- Fitzgerald, A. F. (2023). Empresas estatales de litio en América Latina: Desafíos y oportunidades. *Natural Resource Governance Institute*, 1-39.
- Gielen, D. &. (2002). Critical materials of the energy transition. *Lithium* .
- Mercado de Metales Shangai. MMS. (2025, 03 13). *MMS. (Precio semanal del litio metálico de grado industrial y batería (USD/mt))* Retrieved 03 17, 2025, from <https://www.metal.com/Lithium/202304250001>
- Morales, G. M. (2022). *Litio versatil un camino toruoso en Bolivia*. Potosí: Greco.
- P., D. (2023, junio 30). *Gobierno firma convenio para dos nuevas plantas de extracción directa de litio*. (La Razón) Retrieved abril 15, 2025, from <https://www.la-razon.com/energias-negocios/2023/06/30/gobierno-firma-convenios-para-dos-nuevas-plantas-de-extraccion-directa-de-litio/>
- Sociedad Química y minera de Chile. (2022). *SQM. (Carbonato de litio)* Retrieved abril 15, 2025, from <https://sqlmlitio.com/productos/carbonato-de-litio/>
- Stober, H. C. (1986). Lithium carbonate. *Analytical profiles of drugs substances*, 15, 367-391.
- Taliyawa, U. A., Hamma, I. S., Kwache, A. S., & Umar, a. U. (2023). The role lithium in modern technology. *International Research Journal of Modernization in Engineering Technology and Science*, 5(9), 1987-1791.
- TRADING ECONOMICS. (2025, 03 17). *Litio*. (TRADING ECONOMICS) Retrieved 03 17, 2025, from <https://tradingeconomics.com/commodity/lithium>
- U.S. Geological Survey. (2023, january). *Lithium*. (Brian W. Jaskula) Retrieved 4 15, 2025, from pubs.usgs.gov/periodicals/mcs2023/mcs2023-lithium.pdf
- Valenzuela, E. P. (2015, octubre). *ResearchGate*. (Historia de SOQUIMICH, una revisión) Retrieved abril 15, 2025, from www.researchgate.net/publication/282859509_Historia_de_SOQUIMICH_una_revision

Yacimientos de litio bolivianos. (2024, agosto 28). *YLB INCREMENTA PRODUCCIÓN DIARIA DE CARBONATO DE LITIO EN LA PLANTA INDUSTRIAL*. Retrieved abril 15, 2025, from <https://www.ylb.gob.bo/node/110>



Relación teórica entre matrices estocásticas regulares y vectores de probabilidad fijos en cadenas de Markov discretas

Theoretical relationship between regular stochastic matrices and fixed probability vectors in discrete Markov chains

Gilberto Arando Flores

ggilpotosi@gmail.com

*Universidad Autónoma Tomás Frías
Potosí - Bolivia*

RESUMEN

Las cadenas de Markov, nombradas en honor al matemático ruso Andrei Andreyevich Markov, constituyen modelos matemáticos fundamentales en el análisis estocástico. Estas cadenas permiten modelar y predecir la evolución de sistemas dinámicos mediante el uso de vectores de probabilidad y matrices estocásticas, especialmente en contextos de tiempo discreto.

En este marco, las matrices estocásticas regulares juegan un papel esencial. Una matriz estocástica cuadrada de orden n se considera regular si existe una de sus potencias cuya totalidad de entradas es estrictamente positiva. Esta condición garantiza la conectividad completa del sistema modelado en el largo plazo y la convergencia hacia un comportamiento estable.

Un concepto estrechamente relacionado con estas matrices es el de vector de probabilidad fijo, definido como aquel vector t que satisface la ecuación matricial $tA = t$, donde A es una matriz estocástica de orden $n \times n$. El vector t representa un estado estacionario del sistema, es decir, un vector de probabilidad que permanece invariante ante la aplicación iterativa de la matriz A . En el caso de matrices estocásticas regulares, dicho vector fijo es único y todas sus componentes son estrictamente positivas.

Palabras clave: Cadenas de Markov; Matriz estocástica regular; Vector de probabilidad fijo; Estado estacionario; Convergencia.

ABSTRACT

Markov chains, named after the Russian mathematician Andrei Andreyevich Markov, are fundamental mathematical models in stochastic analysis. These chains are used to model and predict the evolution of dynamic systems through probability vectors and stochastic matrices, particularly in discrete-time scenarios.

Within this framework, **regular stochastic matrices** play a key role. A square stochastic matrix of order n is considered regular if some power of the matrix has all entries strictly positive. This property ensures the full connectivity of the modeled system over time and the convergence to a stable long-term behavior.

Closely associated with regular matrices is the concept of a **fixed probability vector**, defined as a vector t that satisfies the matrix equation $tA = t$, where A is a stochastic matrix of order $n \times n$. The vector t represents a **stationary state** of the system—an invariant probability distribution under repeated application of the matrix A . For regular stochastic matrices, this fixed vector is unique and all of its components are strictly positive.

Key words: Markov chains; Regular stochastic matrix; Fixed probability vector; Stationary state; Convergence.

INTRODUCCIÓN

Las cadenas de Markov constituyen uno de los pilares fundamentales del modelado estocástico en procesos con memoria limitada. Estas cadenas permiten representar sistemas cuya evolución depende únicamente del estado actual, sin necesidad de considerar su historial completo. Entre sus múltiples aplicaciones se encuentran los procesos físicos, biológicos, económicos, entre otros.

El análisis de estos modelos en tiempo discreto se apoya fuertemente en dos herramientas matemáticas: los vectores de probabilidad y las matrices estocásticas. De manera particular, las matrices estocásticas regulares y los vectores de probabilidad fijos resultan esenciales para describir el comportamiento estable de un sistema a largo plazo. Este artículo se centra en el estudio de dicha relación, explorando sus fundamentos, implicancias y propiedades.

MATERIALES Y MÉTODOS

El presente estudio es de naturaleza teórica y se inscribe dentro del marco de un tratamiento matemático fundamentado. La metodología empleada combina herramientas del álgebra lineal, la teoría

de matrices y la teoría de cadenas de Markov en tiempo discreto, con el propósito de establecer la relación entre las matrices estocásticas regulares y los vectores de probabilidad fijos. A continuación, se detallan los procedimientos utilizados para construir matrices estocásticas, verificar su regularidad y determinar los vectores estacionarios correspondientes, así como los fundamentos teóricos y las herramientas técnicas empleadas en el análisis.

Vectores de probabilidad

Definición 1:

Un vector fila $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de orden $1 \times n$, es un vector de probabilidad si sus componentes son no negativos y la suma de estos es igual a 1, o sea:

$$\sum_{i=1}^n u_i = 1 \quad (1)$$

Definición 2:

Si un vector fila $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de orden $1 \times n$ tiene componentes positivos pero que la suma de estos es diferente de uno; entonces se transforma en vector de probabilidad teniendo en cuenta que

$\lambda_1 = \sum_{i=1}^n v_i$, o sea $\lambda_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, de donde $\lambda = \frac{1}{\lambda_1} v = \left(\frac{v_1}{\lambda_1}, \frac{v_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{v_n}{\lambda_1} \right)$ que es vector de probabilidad.

Matrices estocásticas

Definición 3:

Una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ se llama estocástica si cada una de sus filas es un vector de probabilidad y se denota por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ donde } \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (2)$$

Definición 4:

La diagonal principal de una matriz estocástica $A = (a_{ij})$ está formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ y la suma de estos se llama traza denotado por $\text{tr}(A)$, siendo su cálculo dado por

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definición 5:

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se llama doblemente estocástica si cada una de sus filas y columnas son vectores de probabilidad, siendo la suma de sus filas y columnas igual a uno; o sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \tag{3}$$

Definición 6:

Si A y B son dos matrices estocásticas, entonces el producto de AB es otra matriz estocástica, cuyo elemento en la i-ésima fila y la j-ésima columna se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B, o sea:

$$AxB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{p1} & \cdots & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Donde:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \tag{5}$$

Por tanto, todas las potencias A^n son también matrices estocásticas.

Propiedad 1:

Si $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ es un vector de probabilidad y $B = (b_{ij})$ es una matriz estocástica, entonces el producto aB también es un vector de probabilidad, o sea:

$$(a_1, a_2, \dots, a_p) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p a_i b_{i1}, \sum_{i=1}^p a_i b_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^p a_i b_{in} \tag{6}$$

Matriz Estocástica Regular

Definición 7:

Una matriz estocástica P de orden $n \times n$ es regular si los componentes de alguna potencia P^n son todas estrictamente positivas diferentes de cero.

Definición 8:

Una matriz estocástica P de orden $n \times n$ no es regular, si en su diagonal principal existen componentes de 1.

Vector arbitrario

Definición 9:

Un vector de probabilidad arbitrario es un vector fila o columna de dimensión n , denotado típicamente como: $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ que cumple las siguientes dos condiciones:

1. No negatividad: $p_i \geq 0, \forall_{i=1,2,3,\dots,n}$
2. Normalización: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Se dice que es arbitrario porque no está restringido a representar un estado estacionario o resultado particular, sino que puede tomar cualquier forma que cumpla las condiciones anteriores. Es decir, representa cualquier distribución de probabilidad válida sobre un conjunto finito de n estados.

Vector de Probabilidad Fijo

Definición 10:

Un vector de probabilidad fijo t asociado a una matriz estocástica P es aquel que satisface la relación:

$$tP=t \quad (7)$$

Este vector representa un estado estacionario del sistema, es decir, una distribución de probabilidad que no cambia a lo largo del tiempo. En el caso de matrices regulares, el teorema de Perron-Frobenius garantiza que existe un único vector fijo cuyas componentes son estrictamente positivas y cuya suma es 1.

Los vectores de probabilidad fijos constituyen una característica de las matrices estocásticas regulares, su determinación requiere de la consideración de vectores de probabilidad arbitrarios con $n-1$ componentes y $n-1$ incógnitas, y generalmente se denotan por $t = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{n-1})$.

Definición 11:

Sea t un vector de probabilidad fijo que verifica el cumplimiento de $tP = t$, donde P es una matriz estocástica $n \times n$. Los componentes del vector de probabilidad fijo t , son definidas en función al tamaño de la matriz estocástica, es decir, si la matriz A es 2×2 , entonces el vector t , será $t = (x, 1 - x)$ y se denota por:

$$\underbrace{(x, 1 - x)}_t \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{(x, 1 - x)}_t \tag{8}$$

Quedando el siguiente sistema a resolver:

$$\begin{aligned} xa_{11} + (1 - x)a_{21} &= x \\ xa_{12} + (1 - x)a_{22} &= (1 - x) \end{aligned}$$

Definición 12:

Sea T la matriz estocástica estacionaria, cuyas filas son los componentes del vector de probabilidad fijo $t = (x, 1 - x)$, o sea:

$$T = \begin{pmatrix} x & 1 - x \\ x & 1 - x \end{pmatrix} \tag{9}$$

Relación entre vector de probabilidad fijo y matriz estocástica regular

La existencia y unicidad del vector de probabilidad fijo están garantizadas si la matriz estocástica P es regular. Esta relación se formaliza mediante las siguientes propiedades:

Propiedad 2:

Toda matriz estocástica regular P posee un único vector de probabilidad fijo t , con componentes estrictamente positivas.

Propiedad 3:

La sucesión de potencias P, P^2, P^3, \dots converge a una matriz estocástica estacionaria T , cuyas filas son los componentes del vector de probabilidad fijo t .

Propiedad 4:

Dado un vector de probabilidad inicial arbitrario p , la sucesión de vectores pP, pP^2, pP^3, \dots converge al vector de probabilidad fijo t , lo que indica estabilidad asintótica.

Estas propiedades muestran cómo el comportamiento de una cadena de Markov se estabiliza con el tiempo, acercándose siempre al mismo vector fijo sin importar el estado inicial.

Nota aclaratoria:

- Las potencias de la matriz P^n se converge a la matriz estocástica estacionaria T .
- Los vectores pP^n convergen al vector de probabilidad fijo t .

Procesos de Markov

Definición 13:

Un proceso de Markov es un tipo de proceso estocástico que describe la evolución de un sistema a través de una secuencia de estados, en la que la probabilidad de pasar al siguiente estado depende únicamente del estado actual, y no de la trayectoria previa del sistema. Esta propiedad se conoce como la propiedad de Markov o memoria limitada.

El proceso estocástico $\{X_n\}_{n \in \bullet}$ con valores en un conjunto de estados S es un proceso de Markov si para todo $n \in \bullet$ y para todos los estados $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in S$ se cumple:

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = P[X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n] \quad (10)$$

Cadena de Markov

Definición 14:

Una cadena de Markov es un proceso estocástico en tiempo discreto $\{X_n\}_{n \in \bullet}$ definido sobre un espacio de probabilidad, cuyo conjunto de estados S es finito o numerable, y que satisface la propiedad de Markov, es decir, la probabilidad de transición al siguiente estado depende únicamente del estado actual:

$$P[X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j / X_n = i], \quad \forall_{i,j} \in S, \forall_{n \in \bullet} \quad (11)$$

El comportamiento de una cadena de Markov queda completamente determinado por su matriz de transición $P = (p_{i,j})$, donde cada entrada $p_{i,j} = P[X_{n+1} = j / X_n = i]$ representa la probabilidad de pasar del estado i al estado j en un paso. La matriz P es estocástica.

Matriz de transición

Las cadenas de Markov están completamente caracterizadas por las probabilidades de transición, en ese sentido se tiene la siguiente definición:

Definición 15:

Una matriz de transición denotado por P , es una matriz estocástica $n \times n$ cuyos componentes son no negativos, tal que cumple las siguientes propiedades:

- Por ser los p_{ij} probabilidades de transición, entonces:

$$\forall_{i,j} \in S, \quad p_{ij} \in [0,1]$$

- Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, entonces la suma de cada vector fila es igual a uno, o sea:

$$\forall_i \in S, \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$$

Las probabilidades de transición se representan matricialmente, y tienen la siguiente característica:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

RESULTADOS

Los resultados obtenidos en este estudio confirman y ejemplifican la estrecha relación existente entre las matrices estocásticas regulares y los vectores de probabilidad fijos. A continuación, se presentan ejemplos que permiten ilustrar los principales hallazgos derivados del análisis realizado.

Ejemplo 1:

Sea la matriz estocástica regular P dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar el vector de probabilidad fijo t y la matriz estacionaria T .

Solución:

Como la matriz estocástica P es 3×3 , entonces se determina un vector de probabilidad t con tres componentes, o sea: $t = (x, y, 1 - x - y)$ y reemplazando en la definición $tP = t$, se tiene:

$$(x, y, 1 - x - y) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 1 - x - y)$$

Multiplicando el vector t por la matriz P y resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene el siguiente vector de probabilidad fijo:

$$t = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \approx (0.2, 0.4, 0.4)$$

Por tanto, la matriz estocástica estacionaria es:

$$T = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

Sea la matriz estocástica regular P , dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.500 & 0.500 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix}$$

- a) Verificar que las potencias P^n convergen a la matriz estocástica estacionaria T .
- b) Verificar que los vectores pP^n convergen al vector de probabilidad fijo t .

Solución:

Para dar respuesta al ejemplo planteado en cada inciso, es importante considerar los pasos correspondientes.

Respuesta al inciso a):

Primero, se estructura la matriz estocástica estacionaria T, a través de la determinación del vector de probabilidad fijo $t = (x, 1 - x)$. Para lo cual, se procede a multiplicar el vector de probabilidad fijo t por la matriz estocástica P, tomando en cuenta que $tP = t$, se obtiene $x = \frac{2}{7}$ y reemplazando en $t = (x, 1 - x)$, se tiene $t = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right) \approx (0.286, 0.714)$ Por tanto, la matriz estocástica estacionaria T, queda:

$$T = \begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

Segundo, se procede a elevar a la potencia la matriz estocástica P, hasta que se aproxime a la matriz estacionaria T, o sea:

$$P = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.500 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} 0.350 & 0.650 \\ 0.260 & 0.740 \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} 0.305 & 0.695 \\ 0.278 & 0.722 \end{pmatrix}, P^4 = \begin{pmatrix} 0.291 & 0.709 \\ 0.283 & 0.717 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.287 & 0.713 \\ 0.285 & 0.715 \end{pmatrix}, P^6 = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}, P^7 = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}, \dots$$

Se observa que **a partir de la potencia P^6** existe una aproximación exacta a la matriz estocástica estacionaria T, o sea:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}}_{P^6} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}}_T$$

Respuesta al inciso b):

Primero, se plantea un vector de probabilidad arbitrario $p = (0.100, 0.900)$ y se multiplica con las potencias de la matriz estocástica P hasta que la sucesión de vectores pP, pP^2, pP^3, \dots se aproxime al vector de probabilidad fijo t , o sea:

$$pP = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.500 & 0.500 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.230, 0.770)$$

$$pP^2 = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.350 & 0.650 \\ 0.260 & 0.740 \end{pmatrix} = (0.269, 0.731)$$

$$pP^3 = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.305 & 0.695 \\ 0.278 & 0.722 \end{pmatrix} = (0.281, 0.719)$$

$$pP^4 = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.291 & 0.709 \\ 0.283 & 0.717 \end{pmatrix} = (0.284, 0.716)$$

$$pP^5 = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.287 & 0.713 \\ 0.285 & 0.715 \end{pmatrix} = (0.285, 0.715)$$

$$pP^6 = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix} = (0.286, 0.714)$$

$$pP^7 = (0.100, 0.900) \begin{pmatrix} 0.286 & 0.714 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix} = (0.286, 0.714)$$

⋮

Segundo, se observa que **a partir del vector** pP^6 existe una aproximación exacta al vector de probabilidad fijo t , o sea:

$$\underbrace{(0.286 \quad 0.714)}_{pP^6} \approx \underbrace{(0.286 \quad 0.714)}_t$$

Relación de las Cadenas de Markov con un vector de probabilidad fijo a partir de un vector arbitrario

A través del siguiente ejemplo se evidencia la convergencia de una cadena de Markov hacia su vector de probabilidad fijo, iniciando desde un vector arbitrario.

Ejemplo 3:

La compañía Bristol tiene el 40% del negocio de venta de ladrillos en cierta ciudad mediana. Su único competidor de venta de ladrillos la compañía Toledo tiene el otro 60%. Para ser más competitiva, la compañía Bristol contrata una empresa de publicidad que refuerce su imagen. Durante una extensa campaña de publicidad se lleva un registro de las cantidades de ventas mensuales. Se halla que el 90% de los clientes de Bristol regresan a utilizar los servicios de Bristol el mes siguiente, mientras que el 20% de los clientes de Toledo cambian a Bristol.

- ¿Qué porcentaje de clientes emplea cada compañía al cabo de un mes?
- ¿Qué porcentaje emplea cada empresa al cabo de dos meses?
- ¿Qué porcentaje del mercado tendrá cada una de estas empresas a largo plazo?

Solución:

Tomando en cuenta las características del planteamiento, se tiene el siguiente detalle:

Estado actual X_t	Estado siguiente X_{t+1}	
	b	t
b	$p_{bb} = 0.9$	$p_{bt} = 0.1$
t	$p_{tb} = 0.2$	$p_{tt} = 0.8$

Por tanto, la matriz de transición es $P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$, siendo su espacio de estados

$S = \{B, T\} \approx \{b, t\}$. Además el vector de probabilidad inicial $p^{(0)}$, está dada $p^{(0)} = (0.4, 0.6)$

a) Para dar respuesta al primer inciso, se efectúa la siguiente operación:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0.4, 0.6) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.48, 0.52) \approx (48\%, 52\%)$$

De los resultados se concluye que al cabo de un mes el 48% de los clientes prefieren Bristol y el 52% prefieren Toledo.

b) Se efectúa la siguiente operación

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (0.48, 0.52) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.536, 0.464) \approx (53.6\%, 46.4\%)$$

Se concluye que al cabo de dos meses el 53.6% de los clientes prefieren Bristol y el 46.4% prefieren Toledo.

c) Para conocer el comportamiento a largo plazo, se efectúa las siguientes operaciones hasta determinar la estabilidad correspondiente.

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (0.536, 0.464) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.575, 0.425)$$

$$p^{(4)} = p^{(3)}P = (0.575, 0.425) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.603, 0.397)$$

$$p^{(5)} = p^{(4)}P = (0.603, 0.397) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.622, 0.378)$$

$$p^{(6)} = p^{(5)}P = (0.622, 0.378) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.635, 0.365)$$

$$p^{(7)} = p^{(6)}P = (0.635, 0.365) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.645, 0.355)$$

$$p^{(8)} = p^{(7)}P = (0.645, 0.355) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.651, 0.349)$$

$$p^{(9)} = p^{(8)}P = (0.651, 0.349) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.656, 0.344)$$

$$p^{(10)} = p^{(9)}P = (0.656, 0.344) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.659, 0.341)$$

$$p^{(11)} = p^{(10)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.667, 0.333)$$

$$p^{(12)} = p^{(11)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

$$p^{(13)} = p^{(12)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

$$p^{(14)} = p^{(13)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.748, 0.252)$$

$$p^{(15)} = p^{(14)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

$$p^{(16)} = p^{(15)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

$$p^{(17)} = p^{(16)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.667, 0.333)$$

$$p^{(18)} = p^{(17)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

$$p^{(19)} = p^{(18)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

$$p^{(20)} = p^{(19)}P = (0.659, 0.341) \begin{pmatrix} 0.900 & 0.100 \\ 0.200 & 0.800 \end{pmatrix} = (0.661, 0.339)$$

Se concluye que a la larga el 66.1% de los clientes preferirán Bristol y el 33.9% preferirán Toledo. En todo caso a partir del vector $p^{(18)} = (0.661, 0.339)$ se observa que la sucesión de vectores comienza reiterar el mismo resultado, lo cual indica que se ha alcanzado la convergencia al vector de probabilidad fijo $t = (0.661, 0.339)$

Estos resultados confirman el principio de estabilización de cadenas de Markov regulares y respaldan matemáticamente la relación entre regularidad de la matriz y unicidad del vector fijo.

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos en este estudio confirman la relación teórica entre la regularidad de una matriz estocástica y la existencia de un vector de probabilidad fijo único. En particular, se ha observado que, en el contexto de cadenas de Markov en tiempo discreto, la regularidad de la matriz de transición garantiza no solo la convergencia del sistema hacia un estado estacionario, sino también que dicho estado está representado por un vector de probabilidad con entradas estrictamente positivas.

Esto respalda el hecho de que la estructura algebraica de la matriz —específicamente su regularidad— tiene implicaciones directas sobre el comportamiento dinámico del sistema modelado. Los ejemplos construidos permiten visualizar este comportamiento a través de la iteración sucesiva de la matriz, lo que refuerza la intuición sobre la estabilidad y predictibilidad de sistemas que cumplen con estas condiciones.

Asimismo, el estudio resalta el papel fundamental de los vectores de probabilidad como representaciones compactas del estado del sistema, y cómo su invariancia bajo la acción de matrices regulares ofrece una herramienta clave para el análisis de equilibrio en modelos probabilísticos.

Aunque se ha abordado el caso de matrices finitas y regulares, una posible extensión futura podría considerar matrices no regulares o espacios de estados infinitos, lo cual permitiría explorar comportamientos más complejos o transitorios en cadenas de Markov generalizadas.

CONCLUSIONES

Se concluye que las matrices estocásticas regulares presentan una relación directa y determinante con los vectores de probabilidad fijos, asegurando su existencia, unicidad y positividad. Esta propiedad fundamenta el uso de cadenas de Markov regulares como modelos confiables en la simulación y análisis de procesos estocásticos.

La regularidad de la matriz proporciona una garantía matemática de que el sistema modelado tenderá hacia un comportamiento estable, representado por el vector de probabilidad fijo. Esta conclusión fortalece el papel de las cadenas de Markov como herramienta de análisis predictivo y de largo plazo en contextos multidisciplinarios.

CONFLICTO DE INTERESES

El autor declara que no existe ningún conflicto de intereses relacionado con la elaboración, desarrollo o publicación del presente artículo. No se ha recibido apoyo financiero ni institucional que pueda influir en la interpretación de los resultados o en las conclusiones presentadas. Asimismo, no

existen vínculos comerciales o personales que puedan ser percibidos como una influencia indebida sobre el contenido académico de esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al M. Sc. Huáscar Fedor Gonzales Guzmán por su permanente estímulo, su motivación y su compromiso inspirador, que resultaron fundamentales para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arando G. (2020). Elementos de Procesos estocásticos. Potosí.
- Grinstead, C. M., & Snell, J. L. (1997). *Introduction to Probability*. American Mathematical Society.
- Norris, J. R. (1998). *Markov Chains*. Cambridge University Press.
- Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM.
- Kemeny, J. G., & Snell, J. L. (1976). *Finite Markov Chains*. Springer-Verlag.
- Seneta, E. (2006). *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Springer.



La taxonomía de Bloom en la programación computacional

Bloom's taxonomy in computer programming

Carmen Leticia Gómez Valda

leticia.gvipo@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0004-6695-5018>

Universidad Autónoma Tomás Frías

Potosí - Bolivia

RESUMEN

La programación de computadoras constituye un desafío intelectual complejo que va más allá de la simple memorización de reglas sintácticas. Aprender a programar, primeramente, exige una comprensión profunda de estructuras lógicas, abstracción, algoritmos, pensamiento profundo, y análisis de los problemas, que el estudiante debe dominar para poder utilizarlos eficazmente, posterior a ello también se detecta problemas a la hora de escribir el código de un lenguaje de programación. Este proceso de aprendizaje no ocurre de forma instantánea, sino que requiere una evolución progresiva del pensamiento cognitivo, que va desde comprender los fundamentos básicos de la programación, desde el razonamiento lógico hasta la automatización de un problema mediante la escritura de programas en algún lenguaje de programación.

La investigación es de tipo descriptivo y aplicado porque describe los niveles cognitivos de la Taxonomía de Bloom, que es una herramienta pedagógica que permite categorizar los niveles de aprendizaje y planificar estrategias de enseñanza efectivas y se aplica estos niveles en las habilidades de programación computacional, ésta tiene una utilidad práctica con el objetivo de mejorar los problemas que la mayor parte de los estudiantes tienen a la hora de escribir programas automatizados que resuelven problemas planteados.

Palabras clave: Abstracción, Programación de computadoras, Taxonomía de Bloom, Desarrollo cognitivo, Estrategias de aprendizaje, Pensamiento algorítmico.

ABSTRACT

Computer programming represents a complex intellectual challenge that goes beyond the mere memorization of syntactic rules. Learning to program initially requires a deep understanding of logical structures, abstraction, algorithms, deep thinking, and problem analysis—skills that students must master in order to apply them effectively. In addition, difficulties often arise when writing code in a programming language. This learning process is not instantaneous; rather, it requires a progressive development of cognitive thinking, from grasping the fundamental concepts of programming and logical reasoning to automating problem-solving through code implementation.

This research is descriptive and applied in nature, as it describes the cognitive levels of Bloom's Taxonomy—a pedagogical tool that categorizes levels of learning and helps design effective teaching strategies—and applies these levels to computational programming skills. It offers practical value by aiming to address common difficulties students face when writing automated programs that solve specific problems.

Key words: Abstraction, Computer Programming, Bloom's Taxonomy, Cognitive Development, Learning Strategies, Algorithmic Thinking.

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la educación dentro del área de la Informática, la enseñanza de la programación representa un desafío importante para los estudiantes, debido a su complejidad conceptual y práctica, así como también a la parte de razonamiento lógico, que es un aspecto complicado para muchos, pero necesario para la resolución de problemas. Para abordar este reto, se han implementado diversas estrategias pedagógicas que buscan mejorar la comprensión, el razonamiento lógico y la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes. Una alternativa muy usada en el ámbito del proceso enseñanza aprendizaje en el área educativa es la Taxonomía de Bloom, la cual clasifica los objetivos educativos en seis niveles cognitivos: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.

La Taxonomía de Bloom es una herramienta versátil que puede aplicarse en diversos contextos para mejorar el aprendizaje y el desarrollo de habilidades en diferentes niveles de complejidad. Diversos estudios han evidenciado que la aplicación estructurada de esta taxonomía en áreas técnicas como matemáticas, ciencias o ingeniería, así como en el área de la educación es ampliamente utilizado, ya que puede facilitar el desarrollo progresivo de competencias cognitivas. Sin embargo, en el campo de la programación, aún existe una limitada sistematización del uso de la Taxonomía de Bloom, por lo tanto, el presente estudio tiene como objetivo analizar la aplicación práctica de la Taxonomía de Bloom en la

enseñanza de la programación, mediante el diseño de ejercicios y actividades alineadas con cada nivel cognitivo. Se espera que este enfoque contribuya a mejorar la comprensión gradual de conceptos de programación, favoreciendo una progresión cognitiva efectiva en los estudiantes.

Contexto

Taxonomía de Bloom

La Taxonomía de Bloom es una herramienta pedagógica desarrollada con el propósito de clasificar y estructurar los objetivos educativos en distintos niveles de complejidad cognitiva. Fue propuesta inicialmente por Benjamin Bloom y un comité de psicólogos y educadores en 1956, como parte de un esfuerzo por establecer un lenguaje común en la formulación y evaluación de aprendizajes en el ámbito educativo (Bloom et al., 1956). Esta taxonomía, de inicio, se organiza en forma jerárquica y define tres dominios del aprendizaje: cognitivo, afectivo y psicomotor; siendo el dominio cognitivo el más utilizado y ampliamente estudiado.

En su versión original, el dominio cognitivo se compone de seis niveles: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, evaluación y creación. Cada nivel representa una categoría de pensamiento que parte de procesos simples: como recordar información hasta llegar a procesos complejos, como formular juicios críticos o generar nuevas ideas (Krathwohl, 2002).

Con el tiempo, esta taxonomía fue revisada por Anderson y Krathwohl (2001) para adaptarse a los cambios en el enfoque pedagógico contemporáneo, centrado en el estudiante y en el aprendizaje activo. En esta revisión, los sustantivos originales se transformaron en verbos activos para resaltar las acciones cognitivas: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear, siendo este último nivel, el de crear, considerado el más elevado en cuanto a complejidad cognitiva.

La Taxonomía de Bloom no solo permite estructurar objetivos de aprendizaje, sino también diseñar actividades, exámenes y materiales didácticos que estén alineados con los niveles cognitivos deseados. Asimismo, sirve como una guía eficaz para promover el pensamiento crítico, la reflexión y la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento. Por lo que es apto para poder aplicarse en la resolución de problemas computacionales, donde el razonamiento lógico, el análisis y la creación de programas es fundamental para resolver problemas.

La Taxonomía de Bloom se centra principalmente en el dominio cognitivo y constaba de seis niveles (Anderson y Krathwohl, 2001), organizados del más simple al más complejo:

1. **Conocimiento:** Recordar o rememorar información previamente aprendida.
2. **Comprensión:** Entender el significado de la información.
3. **Aplicación:** Utilizar la información aprendida en situaciones nuevas y concretas para resolver problemas.
4. **Análisis:** Desglosar la información en sus partes componentes para comprender su estructura organizacional.

5. **Síntesis:** Combinar diferentes ideas para crear algo nuevo, como una solución, un producto o una perspectiva únicos.
6. **Evaluación:** Emitir juicios sobre el valor de la información, ideas o soluciones basándose en criterios.

Además del dominio cognitivo, la Taxonomía de Bloom también incluye el dominio afectivo (relacionado con las emociones, actitudes y valores) y el dominio psicomotor (relacionado con las habilidades físicas), aunque estos se utilizan con menos frecuencia que el dominio cognitivo en el diseño instruccional. Se representa de forma clara en la Figura 1

Figura 1

Niveles de la Taxonomía de Bloom (Anderson y Krathwohl, 2001)

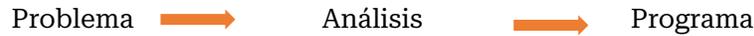


Nota: Esta figura muestra los niveles cognitivos de la Taxonomía de Bloom, inicia en el paso 1 y va escalando hasta el nivel 6.

La programación

La programación es el proceso mediante el cual se diseña, codifica, prueba y mantiene un conjunto de instrucciones que se programa en una computadora y que ejecuta tareas específicas. Estas instrucciones, conocidas como programas, se escriben utilizando lenguajes de programación, los cuales permiten expresar algoritmos y estructuras de datos de manera que una máquina pueda interpretarlos. Desde un enfoque técnico, la programación es la traducción de un problema del mundo real a una solución lógica y computacional, lo que implica modelar situaciones, identificar entradas y salidas, establecer procesos, validar condiciones y automatizar decisiones. En este sentido, programar no solo es escribir código, sino también pensar de forma lógica, estructurada y precisa (Wing, 2006).

La programación, base fundamental para el desarrollo de software y pilar básico del área de informática, que para cumplir con esta meta es necesario seguir una hermenéutica clásica que abarca todo el proceso para automatizar un problema, se resume en lo siguiente:



Donde:

- Para automatizar, se requiere que exista un *problema*, bien planteado, sin ambigüedades.
- Dado el problema, se realiza el *análisis* de dicho problema, considerando las entradas, las salidas y la estrategia a aplicar e incluso la resolución mediante una herramienta de programación (el cual es un paso anterior a la automatización del programa, siendo muy usual usar por ejemplo Diagramas de Flujo)
- Finalmente, se automatiza el problema mediante la escritura de un *programa* en algún lenguaje de programación (Se debe conocer la sintaxis del lenguaje de programación)

MATERIALES Y MÉTODOS

Esta investigación se enmarca dentro del paradigma cualitativo, con un enfoque descriptivo-aplicado, ya que se ha analizado e interpretado la aplicación de los niveles cognitivos de la Taxonomía de Bloom en la enseñanza de la programación computacional. Se utilizó la observación como instrumento cualitativo para evaluar la aplicación de la Taxonomía de Bloom en ejemplos concretos de problemas planteados para ser automatizados, con el fin de reforzar los hallazgos y ampliar la comprensión de este tipo de implementación.

La aplicación de la Taxonomía de Bloom en la resolución de problemas mediante programas en el lenguaje de programación Python, donde la taxonomía proporciona un marco valioso para comprender las diferentes habilidades cognitivas implicadas en la resolución de estos desafíos, ayudando a desglosar el proceso en distintos niveles de pensamiento, desde la comprensión básica hasta la creación avanzada, que es lo que se requiere para llegar a automatizar problemas.

Con la experiencia de varios años en la docencia, se ha detectado muchas falencias en la parte de razonamiento lógico, análisis, comprensión y escritura de código de problemas y que es muy difícil transmitir la forma de razonamiento y habilidades para plantear estrategias que cada estudiante debe poseer a la hora de automatizar un problema.

Para ello es necesario detallar cada uno de los niveles de la Taxonomía de Bloom, relacionarlos con las acciones a ejecutar y la escritura de código en el lenguaje de programación Python.

Tabla 1

Recordar, nivel 1 de la Taxonomía de Bloom

Objetivo	Acciones	Ejemplo
Recuperar información básica sobre programación, en este caso específicamente sobre lenguaje de programación Python	<ul style="list-style-type: none"> - Reconocer - Identificar - Listar - Definir 	<ul style="list-style-type: none"> - Tipos de datos en Python (int, float, str, etc.). - Declaración de variables. - Sintaxis de una función.

Tabla 2

Comprender, nivel 2 de la Taxonomía de Bloom

OBJETIVO	ACCIONES	EJEMPLO
Explicar ideas o conceptos de programación en palabras propias.	<ul style="list-style-type: none"> - Explicar - Resumir - Interpretar - Clasificar 	<ul style="list-style-type: none"> - Explicar qué hace una función for o if. - Interpretar el resultado de un bloque de código

Tabla 3

Aplicar, nivel 3 de la Taxonomía de Bloom

OBJETIVO	ACCIONES	EJEMPLO
Utilizar el conocimiento para resolver problemas.	<ul style="list-style-type: none"> - Ejecutar - Implementar - Usar 	<ul style="list-style-type: none"> - Escribir un programa que convierta horas a minutos. - Implementar una función para verificar si un número es par o impar.

Tabla 4

Analizar, nivel 4 de la Taxonomía de Bloom

OBJETIVO	ACCIONES	EJEMPLO
Descomponer un problema, identificar errores o patrones.	<ul style="list-style-type: none"> - Comparar - Organizar - Diferenciar - Examinar. 	<ul style="list-style-type: none"> - Comparar dos algoritmos (por ejemplo, búsqueda lineal y búsqueda binaria). - Detectar errores lógicos en el código. - Descomponer un problema en funciones más pequeñas.

Tabla 5

Evaluar, nivel 5 de la Taxonomía de Bloom

OBJETIVO	ACCIONES	EJEMPLO
Juzgar o justificar una solución de programación.	<ul style="list-style-type: none"> - Criticar - Valorar - Defender - Argumentar 	<ul style="list-style-type: none"> - Comparar dos soluciones a un mismo problema. - Justificar por qué una estructura de datos es más adecuada que otra. - Revisar código de otros y dar retroalimentación.

Tabla 6

Crear, nivel 6 de la Taxonomía de Bloom

OBJETIVO	ACCIONES	EJEMPLO
Desarrollar un programa original que integre múltiples conceptos.	<ul style="list-style-type: none"> - Diseñar - Construir - Proponer - Desarrollar 	<ul style="list-style-type: none"> - Crear un juego simple en Python (como adivina el número). - Desarrollar una calculadora. - Diseñar un sistema con las opciones de: crear, leer, actualizar, eliminar, etc. para una base de datos.

Al aplicar la Taxonomía de Bloom en la resolución de problemas mediante programas en el lenguaje Python, los estudiantes pueden progresar desde la simple memorización de conceptos básicos hasta la sofisticada habilidad de crear soluciones innovadoras y eficientes. Los educadores también pueden usar este marco para diseñar conjuntos de problemas y evaluaciones que aborden diferentes niveles de implicación cognitiva, fomentando una comprensión más profunda y completa de los algoritmos.

RESULTADOS

Aplicar la Taxonomía de Bloom en la programación produce una serie de resultados positivos y significativos tanto en el proceso de aprendizaje como en la automatización de problemas computacionales. A continuación, se detalla los resultados que se obtendrían al aplicar los seis niveles de la Taxonomía en la programación:

- Se desarrolla un pensamiento más analítico y ordenado.
- Se fomenta el aprendizaje escalonado
- Desarrollo de habilidades cognitivas
- El estudiante tiene la capacidad de autorregular su aprendizaje

Para tal efecto se describe en la Fig. 2, el modelo para detallar los elementos de los seis niveles de la Taxonomía de Bloom en base a un planteamiento de problema:

Tabla 7

Modelo general para la representación de un problema con Taxonomía de Bloom

PROBLEMA:		
Nº	NIVELES	DESCRIPCIÓN
1	Recordar	
2	Comprender	
3	Aplicar	
4	Analizar	
5	Evaluar	
6	Crear	

Para validar el estudio realizado sobre la aplicación de la Taxonomía de Bloom, se ha realizado una prueba piloto con un ejemplo sobre un problema real, que permita codificar en el lenguaje Python, prueba llevada a cabo con estudiantes de la asignatura de Programación y Estructura de Datos Orientado a Objetos (INF221-Grupo 1), que se encuentra en el segundo semestre de la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad Autónoma Tomás Frías.

Tabla 8

Aplicación de la Taxonomía de Bloom en un problema real

PROBLEMA: Utilizar una cadena de caracteres, del cual se debe convertir en mayúsculas, obtener la longitud y la cantidad de palabras que tiene dicha cadena.		
Nº	NIVELES	DESCRIPCIÓN
1	Recordar	Como asignar una cadena a una variable
2	Comprender	Usar y ver qué hace la función <code>.lower()</code>
3	Aplicar	Aplicar una operación para contar letras (función <code>len()</code> que permite obtener la longitud de una cadena)
4	Analizar	Descomponer en varias funciones, para obtener la longitud, para convertir la cadena a mayúscula y verificar la cantidad de palabras que tiene la cadena.
5	Evaluar	Describir si las funciones predefinidas están correctamente usadas.
6	Crear	Crear un programa completo que permita implementar diversas funciones predefinidas de Python.

A continuación se desglosa el programa completo desarrollado y ejecutado en Python:

```
# Nivel 1: Recordar
# Recordar cómo se almacena una cadena
cadena = "Carmen Leticia Gomez Valda"

# Nivel 2: Comprender
# Comprender qué hace este método
print("Nombre en minúsculas:", cadena.upper())

# Nivel 3: Aplicar
# Aplicar una operación para contar Letras
print("Longitud de la cadena:", len(cadena))

# Nivel 4: Analizar
# Dividir la cadena por espacios en blanco.
palabras = cadena.split()
print("Cantidad de palabras: ", len(palabras))

# Nivel 5: Evaluar
# Evaluar si el uso de funciones predefinidas de Python son adecuadas para la resolución

# Nivel 6: Crear
# Crear una función que reciba un nombre y devuelva un análisis
def analizar_cadena(n):
    return {
        "Original": n,
        "Mayuscula": n.upper(),
        "Longitud": len(n),
    }

print("Análisis:", analizar_cadena(cadena))
```

Para validar el estudio realizado, se ha aplicado la herramienta de Observación donde se ha aplicado en el aula para resolver un problema real, del cual se puede interpretar lo siguiente:

- Esta alternativa de análisis a través de la aplicación de los seis niveles de la Taxonomía de Bloom para la resolución de programas en Python ha sido totalmente novedosa, aclarando que de principio cuesta adaptarse.
- El tiempo que se demoró fue un tanto excesivo, pero que a medida que se va practicando puede reducir este tiempo.
- Se trabajó en equipo para la descripción de los seis niveles de la Taxonomía.

DISCUSIÓN

El desarrollo de un modelo basado en la Taxonomía de Bloom para describir los requerimientos cognitivos en la programación computacional representa un avance significativo en la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Este modelo permitió evidenciar que el aprendizaje de la

programación no se limita a la memorización de sintaxis o comandos, sino que requiere un proceso progresivo y jerarquizado que abarca todos los niveles cognitivos planteados por Bloom.

En las primeras etapas del aprendizaje, se identificó que los estudiantes necesitan comprender los conceptos fundamentales, como variables, estructuras condicionales y bucles, lo que coincide con el segundo nivel de la taxonomía. A medida que se avanza en el proceso educativo, se ha hecho evidente la necesidad de aplicar estos conceptos en la resolución de ejercicios simples, lo cual corresponde al tercer nivel. Sin embargo, los mayores desafíos surgen en los niveles superiores: analizar, evaluar y crear, ya que muchos estudiantes presentan dificultades al descomponer un problema complejo en partes más simples (análisis) o al seleccionar la mejor estructura algorítmica para una solución (evaluación), de la misma forma diseñar programas originales (crear), demostró ser más complejo, pero también el más enriquecedor en términos de desarrollo cognitivo.

Estos resultados coinciden con estudios previos que indican que la programación es una actividad que favorece el pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la resolución de problemas complejos (Gomes & Mendes, 2007). Además, refuerzan la idea de que enseñar programación debe ir más allá de los aspectos técnicos y debe incorporar estrategias pedagógicas que estimulen todos los niveles de pensamiento como la Taxonomía de Bloom que permite generar un enfoque pedagógico y que ha sido aplicado en varios ámbitos, como ser: educación, ingeniería, tecnología, etc. que ha permitido mejorar el proceso enseñanza aprendizaje.

CONCLUSIONES

La Taxonomía de Bloom aplicada al desarrollo de programas en lenguaje Python coadyuva a estudiantes que tienen el afán de aprender a programar, al proporcionar una estructura clara para enseñar, aprender, evaluar y mejorar programas en Python desde lo más básico hasta niveles de innovación y creatividad para que los estudiantes se conviertan en programadores competentes y creativos. A la vez ofrece un marco esencial para la enseñanza de la programación, permitiendo diseñar cursos que van desde la memorización de la sintaxis hasta la creación de soluciones innovadoras. Facilita la elaboración de objetivos de aprendizaje claros y actividades progresivas que fomentan el pensamiento crítico, el análisis de problemas y la resolución creativa, más allá de la simple codificación. Al promover un aprendizaje activo y estructurado, no solo mejora la comprensión profunda del estudiante, sino que también equipa a los programadores con habilidades superiores para el desarrollo de software y la innovación tecnológica.

REFERENCIAS

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives* (Complete edition). Longman.

- Armstrong, P. (2010). *Bloom's taxonomy*. Vanderbilt University Center for Teaching. <https://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/blooms-taxonomy/>
- Bloom, B. S. (1971). *Taxonomía de los objetivos de la educación: La clasificación de las metas educacionales. Manual I: Dominio cognoscitivo (2.ª ed.)*. Editorial Troquel.
- Gomes, A., & Mendes, A. J. (2007). *Learning to program—difficulties and solutions*. International Conference on Engineering Education (ICEE), Coimbra, Portugal. Disponible en: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=c2f7131e5fd787c9dc77ef3ae598391ec3a3d0d5>
- Krathwohl, D. R. (2002). *A revision of Bloom's taxonomy: An overview*. *Theory into Practice*, 41(4), 212–218. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2
- Wing, J. M. (2006). *Computational Thinking*. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35. <https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>



Aplicación de redes neuronales convolucionales para el reconocimiento de imágenes: comparación de modelos de Deep Learning

Application of convolutional neural networks for image recognition: comparison of deep learning models

Maribel Rosario Condori Llanos

maribelconlla@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0004-6590-3240>

Universidad Autónoma Tomás Frías

Potosí - Bolivia

RESUMEN

El aprendizaje profundo (deep learning) ha revolucionado múltiples sectores con aplicaciones como coches autónomos, asistentes virtuales, detección de fraudes y apoyo en cirugías, mejorando la calidad de vida y la seguridad. Este subcampo del aprendizaje automático se basa en redes neuronales artificiales inspiradas en el cerebro humano, capaces de aprender patrones complejos mediante redes profundas con múltiples capas. En este trabajo se aplicaron redes neuronales convolucionales (CNN) para reconocimiento de imágenes de 158 participantes de un curso, utilizando Python y TensorFlow. Se dividieron las imágenes en carpetas de entrenamiento y prueba, y se evaluaron cuatro modelos: uno básico, uno profundo, otro con capas de *Dropout* para reducir sobreajuste, y uno con *BatchNormalization* para estabilizar el entrenamiento. El modelo profundo obtuvo la mayor precisión (99.37 %), mostrando su superioridad frente a los demás. El modelo con *Dropout* también fue efectivo, aunque ligeramente menos preciso, mientras que el modelo con *BatchNormalization* mostró bajo rendimiento, indicando la necesidad de ajustes. En conclusión, la complejidad adicional del modelo

profundo permitió mejores resultados en clasificación de imágenes. La elección del modelo más adecuado depende de las necesidades, la disponibilidad de datos y los recursos computacionales, destacando la importancia de una adecuada configuración para optimizar el desempeño.

Palabras clave: Aprendizaje profundo; Redes Neuronales; Reconocimiento de imágenes; Dropout; BatchNormalitation

ABSTRACT

Deep learning has emerged as a transformative technology with applications ranging from autonomous vehicles and virtual assistants to fraud detection and medical support, improving safety and quality of life. This work explores the use of convolutional neural networks (CNNs) for image recognition, focusing on the classification of 158 images of course participants. The methodology involved splitting the dataset into training and testing sets, and implementing four CNN models: a basic model, a deeper architecture, a model with Dropout layers to mitigate overfitting, and a model with BatchNormalization to stabilize training. Results show that the deep CNN model achieved the highest test accuracy (99.37%), outperforming the other configurations. The Dropout-enhanced model showed acceptable but slightly lower performance, while the BatchNormalization model performed poorly, suggesting overfitting and instability in this context. These findings highlight that increased depth and complexity can significantly improve recognition performance, while regularization techniques require careful tuning depending on data size and quality. In conclusion, model selection must balance architectural complexity, regularization strategies, and data characteristics to optimize performance for specific applications. This study underscores the potential of deep learning and CNNs in solving real-world image classification problems.

Key words: Deep Learning; Convolutional Neural Networks; Image Recognition; Dropout; Batch Normalization

INTRODUCCIÓN

Hace unos años, no se hubiera imaginado que las aplicaciones del Deep Learning ofrecieran coches autónomos o asistentes virtuales como Alexa, Siri y Google Assistant. No obstante, estas creaciones empiezan a formar parte del día a día.

El Deep Learning (aprendizaje profundo) continúa fascinando con sus infinitas posibilidades, como la detección de fraudes o la restauración de píxeles. En este artículo se intenta acercar y comprender mejor las aplicaciones del aprendizaje profundo en todo tipo de industrias y sectores. El Deep Learning es un campo de pruebas y una tecnología que está en

constante cambio y evolución. Un sector de la investigación en inteligencia artificial que necesita de profesionales especializados y cualificados.

El Deep Learning es un subcampo del aprendizaje automático que se ocupa de algoritmos inspirados en la estructura y en la función del cerebro humano, en lo que denominamos redes neuronales artificiales. Se trata de un ámbito de investigación relacionado con la inteligencia artificial, ya cuenta con multitud de aplicaciones que se empieza a descubrir.

Pensar en un mundo sin accidentes de tráfico. Imaginar un mundo donde todas las cirugías tienen éxito y no se pierden vidas humanas en el proceso. Elabora un mundo en el que los más desfavorecidos pueden disfrutar de la misma calidad de vida que tenemos todos.

Cuando se habla de aprendizaje profundo, hay que imaginar una gran red neuronal con una gran cantidad de capas. Por ese motivo, en general, lo más óptimo es hablar sobre redes neuronales profundas.

Las aplicaciones del Deep Learning pueden parecer algo ilusorio para alguien que no se ha acercado demasiado a este campo. No obstante, aquellos que conocen el mundo del aprendizaje automático, entienden la mella que esta rama de la Inteligencia Artificial está haciendo a nivel mundial; al explorar y resolver problemas humanos en todos los dominios.

MATERIALES Y MÉTODOS

Gracias al Deep Learning las imágenes se pueden ordenar en función de las ubicaciones detectadas en fotografías, rostros, una combinación de personas, o según eventos, fechas, etc.

El reconocimiento visual a través de redes neuronales profundas está impulsando el crecimiento en este segmento de la administración de medios digitales mediante el uso extensivo de redes neuronales convolucionales desarrolladas con Tensorflow y Python.

Las Redes Neuronales Convolucionales son una serie de redes que fueron creadas pensando en cómo funciona el cerebro, capaces de aprender en los diferentes niveles de abstracción: en la primera capa se diferencian formas simples, colores o bordes; en la siguiente se pueden distinguir combinaciones de bordes y colores; mientras que la última capa se fija en la forma con el fin de conseguir averiguar qué es exactamente.

Para la aplicación de los métodos de Deep Learning, se consideró un total de 158 imágenes de participantes de un curso proporcionadas para el presente trabajo, a partir de aquello se realizó los siguientes pasos:

1. Se debe cargar la carpeta Proyectos en la Unidad D:, ya que en esa carpeta se encuentran las imágenes para el reconocimiento

Figura 1

Carga de Imágenes para el reconocimiento

```
#Preparamos Los datos
directorio_datos = 'D:\Proyectos\ImagenesCurso'
tamano_imagen = (128, 128)

datagen = ImageDataGenerator(rescale=1.0 / 255.0)
datos_entrenamiento = datagen.flow_from_directory(
    directorio_datos,
    target_size=tamano_imagen,
    batch_size=32,
    class_mode='categorical'
)
```

Found 158 images belonging to 23 classes.

2. Definido el sistema de reconocimiento, solo se necesita cargar las imágenes proporcionadas en las carpetas que contienen las imágenes de cada participante del curso para probar su funcionamiento.

Se consideran dos carpetas: 1 para el entrenamiento TRAIN y otra para el testeo TEST.

3. Se implementa el primer modelo de la red convolucional, obteniendo el siguiente resultado:

Figura 2

Implementación del modelo de red convolucional

```
# Paso 4: Entrenar el modelo
epochs = 10 # Número de épocas para el entrenamiento
modelo_simple.fit(datos_entrenamiento, epochs=epochs)

Epoch 1/10
5/5 [=====] - 6s 1s/step - loss: 5.1422 - accuracy: 0.0443
Epoch 2/10
5/5 [=====] - 5s 1s/step - loss: 3.0562 - accuracy: 0.1076
Epoch 3/10
5/5 [=====] - 5s 1s/step - loss: 2.7220 - accuracy: 0.3354
Epoch 4/10
5/5 [=====] - 5s 903ms/step - loss: 2.2352 - accuracy: 0.6203
Epoch 5/10
5/5 [=====] - 5s 974ms/step - loss: 1.5450 - accuracy: 0.6646
Epoch 6/10
5/5 [=====] - 5s 990ms/step - loss: 0.8704 - accuracy: 0.8228
Epoch 7/10
5/5 [=====] - 5s 943ms/step - loss: 0.3910 - accuracy: 0.9241
Epoch 8/10
5/5 [=====] - 5s 956ms/step - loss: 0.1424 - accuracy: 0.9747
Epoch 9/10
5/5 [=====] - 5s 1s/step - loss: 0.0674 - accuracy: 0.9937
Epoch 10/10
5/5 [=====] - 5s 956ms/step - loss: 0.0222 - accuracy: 0.9937
```

4. Se carga las imágenes de la segunda carpeta para realizar el testeo:

Figura 3

Carga y procesamiento de datos de prueba

```
# Cargar y procesar Los datos de prueba
directorio_prueba = 'D:\Proyectos\ImagenesCursoTest'

datagen_prueba = ImageDataGenerator(rescale=1.0 / 255.0)
datos_prueba = datagen_prueba.flow_from_directory(
    directorio_prueba,
    target_size=tamano_imagen,
    batch_size=32,
    class_mode='categorical',
    shuffle=False # Asegura que los datos de prueba no se mezclen para una evaluación precisa
)
```

Found 71 images belonging to 23 classes.

- Implementación del modelo 2 que es la construcción de la red convolucional, se muestra a continuación:

Figura 4

Construcción de la red convolucional

```
# Modelo 2: Construir el modelo convolucional profundo
modelo_profundo = Sequential()

modelo_profundo.add(Conv2D(32, (3, 3), activation='relu', input_shape=(128, 128, 3)))
modelo_profundo.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_profundo.add(Conv2D(64, (3, 3), activation='relu'))
modelo_profundo.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_profundo.add(Conv2D(128, (3, 3), activation='relu'))
modelo_profundo.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_profundo.add(Flatten())

modelo_profundo.add(Dense(256, activation='relu'))
modelo_profundo.add(Dense(numero_clases, activation='softmax'))

# Paso 3: Compilar el modelo
modelo_profundo.compile(optimizer='adam', loss='categorical_crossentropy', metrics=['accuracy'])

# Paso 4: Entrenar el modelo
epochs = 10 # Número de épocas para el entrenamiento
modelo_profundo.fit(datos_entrenamiento, epochs=epochs)
```

- Para poder optimizar el reconocimiento de imágenes se implementa un tercer modelo: #Modelo 3: modelo convolucional con Capas de Dropout El Dropout es una técnica de regularización que se aplica durante el entrenamiento de la red para reducir el sobreajuste (overfitting). La idea principal detrás de Dropout es "apagar" aleatoriamente un conjunto de neuronas (neuronas y sus conexiones) en cada paso del entrenamiento. Esto evita que la red dependa demasiado de ciertas neuronas y obliga a otras a aprender de manera más independiente y robusta.

Figura 5

Construcción del modelo convolucional con Capas de Dropout

```

# Modelo 3: Construir el modelo convolucional con Capas de Dropout
modelo_dropout = Sequential()

modelo_dropout.add(Conv2D(32, (3, 3), activation='relu', input_shape=(128, 128, 3)))
modelo_dropout.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_dropout.add(Conv2D(64, (3, 3), activation='relu'))
modelo_dropout.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_dropout.add(Flatten())

modelo_dropout.add(Dense(128, activation='relu'))
modelo_dropout.add(Dropout(0.5)) # Agregar capa de Dropout con una tasa de 0.5

modelo_dropout.add(Dense(numero_clases, activation='softmax'))

# Paso 3: Compilar el modelo
modelo_dropout.compile(optimizer='adam', loss='categorical_crossentropy', metrics=['accuracy'])

# Paso 4: Entrenar el modelo
epochs = 10 # Número de épocas para el entrenamiento
modelo_dropout.fit(datos_entrenamiento, epochs=epochs)

```

7. A partir de la implementación de los modelos anteriores, se implementa un Modelo 4 de la red convolucional: #Modelo 4: modelo convolucional con Capas de BatchNormalization. BatchNormalization es una técnica de normalización aplicada en el entrenamiento de redes neuronales que ayuda a estabilizar y acelerar el proceso de convergencia. La normalización por lotes normaliza la salida de cada capa oculta en una red neuronal mediante el ajuste del promedio y la varianza de cada mini-batch durante el entrenamiento.

Figura 6

Construcción del modelo convolucional con Capas de BatchNormalization

```

# Modelo 4: Construir el modelo convolucional con Capas de BatchNormalization
modelo_batchnorm = Sequential()

modelo_batchnorm.add(Conv2D(32, (3, 3), activation='relu', input_shape=(128, 128, 3)))
modelo_batchnorm.add(BatchNormalization())
modelo_batchnorm.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_batchnorm.add(Conv2D(64, (3, 3), activation='relu'))
modelo_batchnorm.add(BatchNormalization())
modelo_batchnorm.add(MaxPooling2D((2, 2)))

modelo_batchnorm.add(Flatten())

modelo_batchnorm.add(Dense(128, activation='relu'))
modelo_batchnorm.add(Dense(numero_clases, activation='softmax'))

# Paso 3: Compilar el modelo
modelo_batchnorm.compile(optimizer='adam', loss='categorical_crossentropy', metrics=['accuracy'])

# Paso 4: Entrenar el modelo
epochs = 10 # Número de épocas para el entrenamiento
modelo_batchnorm.fit(datos_entrenamiento, epochs=epochs)

```

RESULTADOS

A partir de la aplicación de los diferentes modelos, se tiene los siguientes resultados:

1. Se implementa el primer modelo de la red convolucional, obteniendo el siguiente resultado:

```
# Paso 4: Entrenar el modelo
epochs = 10 # Número de épocas para el entrenamiento
modelo_simple.fit(datos_entrenamiento, epochs=epochs)

Epoch 1/10
5/5 [=====] - 6s 1s/step - loss: 5.1422 - accuracy: 0.0443
Epoch 2/10
5/5 [=====] - 5s 1s/step - loss: 3.0562 - accuracy: 0.1076
Epoch 3/10
5/5 [=====] - 5s 1s/step - loss: 2.7220 - accuracy: 0.3354
Epoch 4/10
5/5 [=====] - 5s 903ms/step - loss: 2.2352 - accuracy: 0.6203
Epoch 5/10
5/5 [=====] - 5s 974ms/step - loss: 1.5450 - accuracy: 0.6646
Epoch 6/10
5/5 [=====] - 5s 990ms/step - loss: 0.8704 - accuracy: 0.8228
Epoch 7/10
5/5 [=====] - 5s 943ms/step - loss: 0.3910 - accuracy: 0.9241
Epoch 8/10
5/5 [=====] - 5s 956ms/step - loss: 0.1424 - accuracy: 0.9747
Epoch 9/10
5/5 [=====] - 5s 1s/step - loss: 0.0674 - accuracy: 0.9937
Epoch 10/10
5/5 [=====] - 5s 956ms/step - loss: 0.0222 - accuracy: 0.9937
```

Obteniendo como resultado de dicho entrenamiento un valor de 0,9937

2. Habiendo realizado la evaluación del modelo profundo se muestra el siguiente resultado:

```
# Evaluación del modelo profundo en datos de prueba
resultados_evaluacion = modelo_profundo.evaluate(datos_prueba)

# Los resultados de la evaluación contendrán la pérdida y las métricas definidas durante la compilación del modelo
print("Pérdida en datos de prueba:", resultados_evaluacion[0])
print("Precisión en datos de prueba:", resultados_evaluacion[1])

3/3 [=====] - 2s 355ms/step - loss: 1.3144 - accuracy: 0.7887
Pérdida en datos de prueba: 1.314370036125183
Precisión en datos de prueba: 0.7887324094772339
```

El modelo con capas de Dropout también tiene una precisión aceptable, pero es ligeramente inferior al modelo simple.

El modelo con capas de BatchNormalization muestra un rendimiento muy pobre, con una baja precisión y una pérdida significativamente alta, lo que indica que el modelo no está generalizando bien y puede estar sufriendo de overfitting.

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos confirman la capacidad del aprendizaje profundo para resolver problemas complejos de clasificación de imágenes, gracias a la alta expresividad de las redes neuronales convolucionales. El modelo profundo superó a los demás en precisión, lo cual es consistente con la literatura, ya que arquitecturas más complejas pueden capturar mejor los patrones presentes en los datos. Sin embargo, este beneficio también implica un mayor riesgo de sobreajuste, lo que justifica la exploración de técnicas de regularización como *Dropout* y *BatchNormalization*.

El modelo con *Dropout* logró reducir el sobreajuste parcialmente, aunque su precisión fue menor en comparación con el modelo profundo sin regularización, posiblemente debido a una configuración

subóptima de la tasa de abandono. Por su parte, el bajo rendimiento del modelo con BatchNormalization sugiere que esta técnica no siempre garantiza mejoras y puede depender fuertemente del tamaño del conjunto de datos y de la arquitectura empleada.

En este sentido, la elección del modelo más adecuado debe considerar no solo la complejidad de la tarea, sino también las características del conjunto de datos y los recursos computacionales disponibles. Futuras investigaciones podrían evaluar ajustes más finos en las técnicas de regularización, aumentar el volumen de datos o aplicar data augmentation para mejorar la generalización.

CONCLUSIÓN

El modelo profundo tiene la mayor precisión en datos de prueba, lo que indica que es el que mejor clasifica las imágenes de personas en comparación con los otros modelos. El modelo simple tiene una precisión considerable, pero es superado por el modelo profundo en rendimiento.

El modelo profundo parece ser el mejor de los cuatro en términos de precisión en datos de prueba, lo que sugiere que la profundidad y complejidad adicional en la arquitectura han permitido obtener un mejor rendimiento en el reconocimiento de imágenes de personas. Los otros modelos podrían beneficiarse de ajustes y optimizaciones para mejorar su rendimiento. También es importante tener en cuenta que la elección del modelo depende de las necesidades específicas del proyecto y la cantidad de datos disponibles para el entrenamiento.

El aprendizaje profundo demostró ser eficaz para el reconocimiento de imágenes, destacando el modelo profundo como el más preciso. Aunque el uso de *Dropout* mejoró la generalización, su desempeño fue inferior al modelo profundo, y el modelo con *BatchNormalization* no alcanzó buenos resultados. Esto evidencia la importancia de ajustar las arquitecturas y técnicas según los datos. En general, las redes convolucionales son una herramienta potente para la clasificación de imágenes cuando se diseñan y entrenan correctamente.

REFERENCIAS

- CASADO N.(2022), Redes neuronales convolucionales y aplicaciones, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MARID <https://docta.ucm.es/entities/publication/313b5a83-65c6-4177-b62d-c1e3711dc837>
- MARTINEZ J. (2020) Reconocimiento de Imágenes mediante Redes Convolucionales https://oa.upm.es/53050/1/TFG_JAVIER_MARTINEZ_LLAMAS.pdf
- SARMIENTO J. (2020) Aplicaciones de las redes neuronales y el deep learning a la ingeniería biomédica <https://www.redalyc.org/journal/5537/553768213002/html/>
- VENEROS M. (2023). Fundamentos de Deep Learning, Universidad Privada Boliviana

CIENCIAS PURAS REVISTA CIENTÍFICA



Información De Contacto

Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Puras (I2CP)
Universidad Autónoma Tomás Frías

i2cp@uatf.edu.bo
<https://revista-i2cp.uatf.edu.bo/>
<https://i2cp.uatf.edu.bo/>
<https://www.facebook.com/uatf.i2cp>

Equipo Editorial

Editor:

M. Sc. Lic. Huáscar Fedor Gonzales Guzmán

Revisores:

M. Sc. Lic. Raúl Mamani Mamani
M. Sc. Lic. Wilson Fuentes Montero
M. Sc. Lic. Roberto Ramos Castro
M. Sc. Lic. María Cristina Fernández Ruiz
M. Sc. Lic. Efrain Pedro Ortega Reyes
M. Sc. Lic. Maribel Rosario Condori Llanos
M. Sc. Lic. Carmen Leticia Gómez Valda

Edición: Julio de 2025

“Nos esforzamos por brindarle los contenidos más relevantes y actuales en nuestra área. Esperamos que esta edición haya sido de su agrado y le invitamos a seguirnos en nuestras redes sociales para informarle de nuestras futuras publicaciones”